Vom Binärsystem zum Taschenrechner und Computer

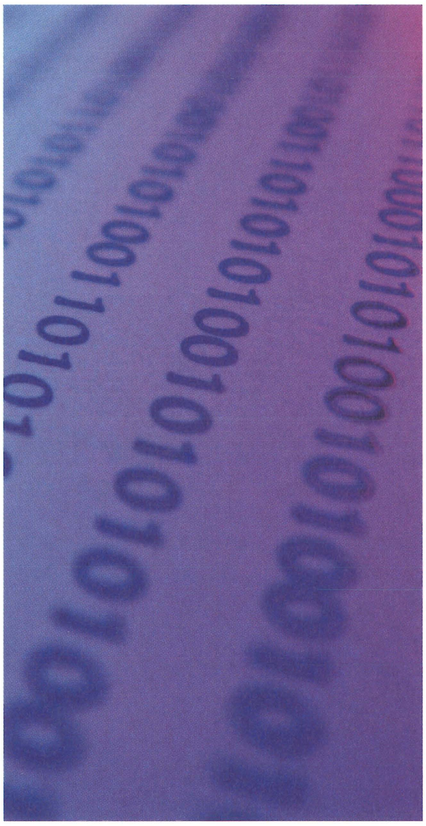
Das Dual- oder Binärsystem

Normalerweise schreibt man beim Zweiersystem (auch als Binär- oder Dualsystem bezeichnet) nur die Zahlen in anderer Art; durch die Anwendung eines kleinen Tricks lassen sich aber auch die Buchstaben (übrigens äusserst effektvoll) darstellen, wie dies die entsprechenden AB zeigen. Walter Hofmann u. a.

Die Klasse lernt:

- Das Begreifen, dass «unsere» Zahlenschreibweise (das Zehnersystem) nur eine von vielen möglichen Zahlenschreibweisen ist. (Die zehn Finger unserer beiden Hände sind zweifellos der Grund dafür, dass die Zahl zehn Grundlage unseres Zahlensystems geworden ist.)
- Das Einsehen, dass das Arbeiten mit der Binärschrift nur dann gelingt, wenn bei Ver- und Entschlüsselungen äusserst exakt gearbeitet wird. (So muss z. B. beim Senden akustischer oder optischer Morsezeichen eindeutig zwischen langen und kurzen Signalen unterschieden werden können.)
- Das Erkennen, dass durch die Beschäftigung mit den denkspielerischen Aufgaben das logische Denken und das Durchhalten beim Aufspüren des Lösungsweges geübt, vor allem aber auch die sich einstellende Freude beim Finden der Lösung erlebt werden kann. (AB «Die vier Spotleuchten» oder «Die fünf Wunderstreifen»)

Unser Taschenrechner und Computer arbeiten mit dem Binärsystem.



Das **Dualsystem** (lat. dualis = zwei enthaltend), auch Zweiersystem oder Binärsystem genannt, ist ein Zahlensystem, das zur Darstellung von Zahlen nur zwei verschiedene Ziffern benutzt.

Im üblichen Dezimalsystem werden die Ziffern 0 bis 9 verwendet. Im Dualsystem hingegen werden Zahlen nur mit den Ziffern des Wertes Null und Eins dargestellt. Oft werden für diese Ziffern die Symbole 0 und 1 verwendet. Die Zahlen Null bis Fünfzehn sind in der rechts stehenden Liste aufgeführt.

Das Dualsystem ist das Stellenwertsystem mit der Basis 2, liefert also die dyadische (2-adische) Darstellung von Zahlen **(Dyadik)** (gr. δύο = zwei).

Aufgrund seiner Bedeutung in der Digitaltechnik ist es neben dem Dezimalsystem das wichtigste Zahlensystem.

Die Zahldarstellungen im Dualsystem werden auch **Dualzahlen** oder **Binärzahlen** genannt. Letztere ist die allgemeine Bezeichnung, da diese auch einfach für binärcodierte Zahlen stehen kann.

Dezimalzahlen 0 bis 15 im Dualsystem

Wertigkeit:	**8 4 2 1**
Null:	0 0 0 0
Eins:	0 0 0 1
Zwei:	0 0 1 0
Drei:	0 0 1 1
Vier:	0 1 0 0
Fünf:	0 1 0 1
Sechs:	0 1 1 0
Sieben:	0 1 1 1
Acht:	1 0 0 0
Neun:	1 0 0 1
Zehn:	1 0 1 0
Elf:	1 0 1 1
Zwölf:	1 1 0 0
Dreizehn:	1 1 0 1
Vierzehn:	1 1 1 0
Fünfzehn:	1 1 1 1

Die ersten Realisierungen in der Technik

- Im November 1937 vollendete George Stibitz, der später bei den Bell Labs arbeitete, seinen relaisgestützten Rechner «Modell K» (nach «K» für «Küche», wo er ihn zusammengebaut hat), der die Addition im Dualsystem beherrschte.
- 1937 baute Konrad Zuse eine auf dem Dualsystem basierende Rechenmaschine, die mechanische Zuse Z1. Siehe Schulpraxis, Heft 4, 2010, S. 29ff. K. Zuse: Siegeszug des Computers.
- 1937 fertigte Claude Shannon seine Master-Abschlussarbeit am MIT an, die erstmals die Boole'sche Algebra und die Arithmetik im Dualsystem in elektronischen Relais und Schaltern realisierte. Unter dem Titel «A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits» hat Shannons Arbeit die Konstruktion digitaler Schaltkreise begründet.
- 1937 bis 1941 bauten John Atanasoff und Clifford Berry den ersten elektronischen Digitalrechner, den auf Elektronenröhren basierenden Atanasoff-Berry-Computer.
- Am 12. Mai 1941 führte Konrad Zuse einem kleinen Kreis in Berlin den weltweit ersten universell programmierbaren binären Digitalrechner, die elektromechanische Zuse Z3, vor, welcher aber im Zweiten Weltkrieg komplett zerstört wurde.
- Am 19. März 1955 stellten die Bell-Forschungslaboratorien den weltweit ersten ausschliesslich mit Halbleiter-Elementen realisierten binären Digitalrechner vor.

Anwendung

Bei der Entwicklung von elektronischen Rechenmaschinen erlangte das Dualsystem grosse Bedeutung, denn in der Digitaltechnik werden Zahlen durch elektrische Zustände dargestellt. Bevorzugt werden zwei komplementäre Zustände wie *Strom an / Strom aus* verwendet, da auf diese Weise sehr einfache Schaltungen zu realisieren sind. Diese zwei Zustände lassen sich dann als Ziffern benutzen. Das Dualsystem ist die einfachste Methode, um mit Zahlen zu rechnen, die durch diese zwei Ziffern dargestellt werden.

Das Dualsystem im Internet

Einige Schüler, die bei jedem Thema immer gerade wissen wollen, was das Internet dazu sagt, sind bei diesem Thema ziemlich still geblieben. 99% der Beiträge waren «zu hoch». Aber sie wunderten sich: Schon Fünftklässler im Gymi und in der Realschule in Deutschland lernen mit dem Dualsystem alle vier Grundrechnungsarten. Leider haben viele Arbeitsblätter aber keine Lösungen. Zum Glück ist das Dualsystem bei uns freiwillig, sogar die hier abgedruckten Arbeitsblätter (für Partnerarbeit der besseren Klassenhälfte).

Natürlich hat das Internet auch Antworten, wenn als Frage eingegeben wird: Wie funktioniert Taschenrechner? Computer?

Grossen Gefallen fand auch die schwächere Klassenhälfte bei «blinde-kuh.de», wenn ganz unten bei den Sachgebieten «Computer» gewählt wurde. «Bitbite erklärt den Computer und das Internet», «Klick Tipps», «Stay online, stay safe», «Geschichte der Videospiele und Heimcomputer», alles beliebte und leicht verständliche Seiten. Grösster Hit war aber «Tippen lernen mit Calli Clever». Da lernt man in 20 Stunden blind mit dem Zehn-Finger-System auf der Normaltastatur schreiben. Viele Schüler wollen durchhalten und das lernen; sie werden deshalb bei den übrigen Aufgaben entlastet während eines Monats. Es ist eben schon schön, wenn man mit allen Fingern, ohne auf die Tastatur schauen zu müssen, Texte verfassen oder abschreiben kann. Eine lebenslange Investition, wärmstens zu empfehlen! (Lo)

Addition	Beispiel
$0+0=0$ $0+1=1$ $1+0=1$ $1+1=10$	$\begin{array}{r} 1011_2 \\ +\quad 11_2 \\ \hline 1110_2 \end{array}$

Subtraktion	Beispiel
$0-0=0$ $0-1=-1$ $1-0=1$ $1-1=0$	$\begin{array}{r} 1011_2 \\ -\quad 111_2 \\ \hline 100_2 \end{array}$

Multiplikation	Beispiel
$0\cdot0=0$ $0\cdot1=0$ $1\cdot0=0$ $1\cdot1=1$	$1010_2 \cdot 11_2 = 11110_2$

Division	Beispiel
$0/0=$ n.def. $0/1=0$ $1/0=$ n.def. $1/1=1$	$1010_2/10_2 = 101_2$

Beispiele aus Deutschland (5. Klasse)

Aufgabe: Addiere im Dualsystem!

a) 1010011 + 101101
b) 11011011 + 1011011
c) 101101 + 1111001

Aufgabe: Multipliziere im Dualsystem!

a) 1011 · 1011
b) 11101 · 1101
c) 1100101 · 11011

Aufgabe: In 6 Häusern sind je 6 Katzen, jede Katze frisst 6 Mäuse und jede Maus frisst 6 Käsestücke. Gib die Anzahl der Katzen, der Mäuse und der Käsestücke an!

Aufgabe: In einem Bergsee befindet sich eine Seerose. Die Seerose teilt sich jeden Tag. Wie viele Seerosen sind es

a) nach 5
b) nach 6
c) nach 7
d) nach 8 Tagen?
e) Nach 13 Tagen ist die Hälfte des Sees von Seerosen bedeckt. Wie lange dauert es, bis dass der ganze See bedeckt ist?

Das Zweiersystem

A1

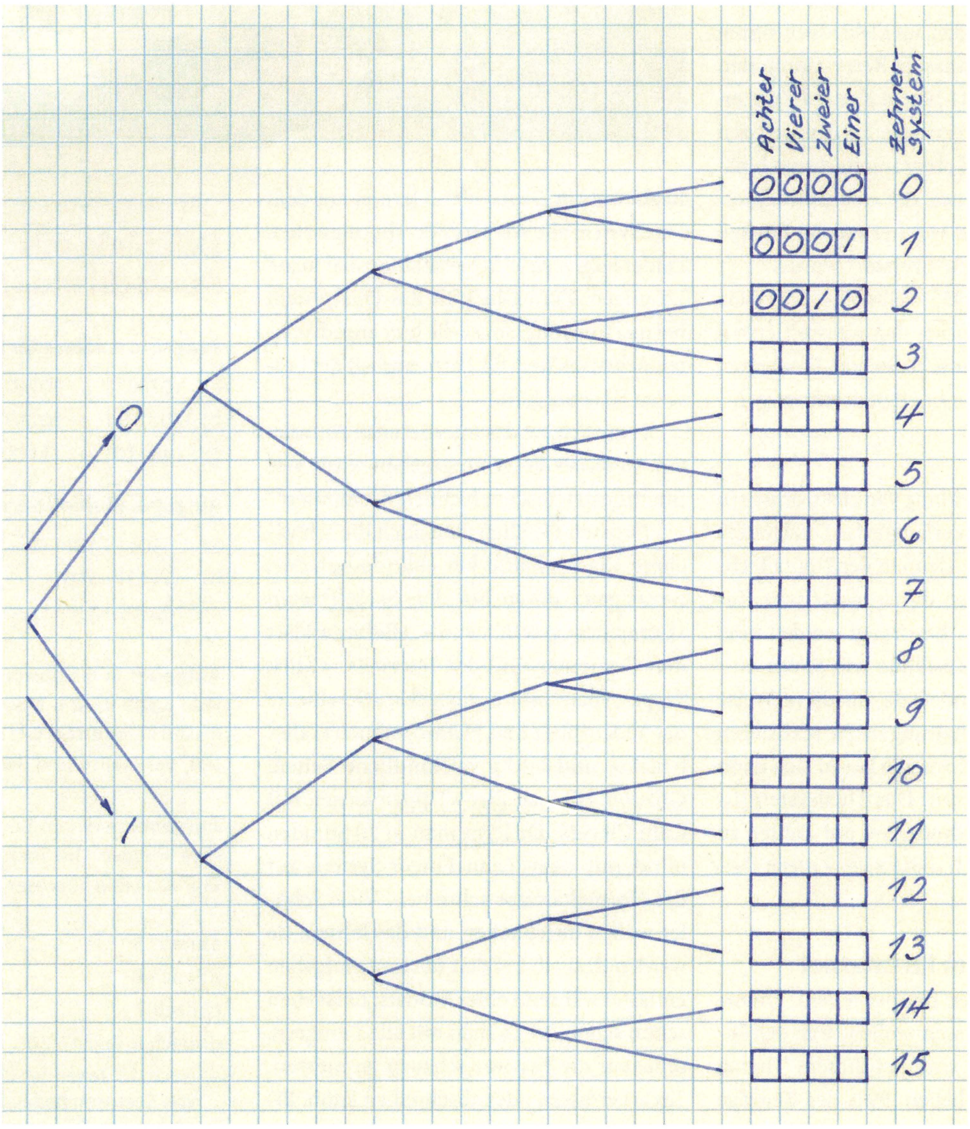
Wenn du das Zweiersystem kennen und verstehen lernen willst, musst du dir folgende *beiden Besonderheiten* dieser Zahlenschreibweise merken:

– Zum Schreiben der Zahlen benötigst du einzig die zwei Ziffern 0 und I (und nicht etwa die 1, damit Verwechslungen mit dem normalen Zehnersystem vermieden werden können).

– Die Stellenwerte heissen Einer, Zweier, Vierer, Achter, Sechzehner usw., d. h. es sind die *Zweierpotenzen* 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4 usw., welche auch zur *Bezeichnung Zweiersystem* geführt haben.

Zur Bestimmung der ersten 16 Zahlen (beginnend mit der 0) in der Schreibweise des Zweiersystems hilft dir *die untenstehende Baumdarstellung* mit den immer zwei Verästelungen *(nach oben bedeutet stets 0, nach unten dementsprechend I).*

Hinweis:
Noch eingehender und gründlicher kannst du dich in das Zweiersystem vertiefen, wenn du auch die Zahlen von 0 bis 63 (jetzt aber ohne Hilfe des Zahlenbaumes!) aufschreibst und mit dem Zehnersystem vergleichst. Notiere dabei die (eigentlich unnötigen) Nullen am Anfang der Zahlen nicht mehr!



Zählen im Zehner- und Zweiersystem

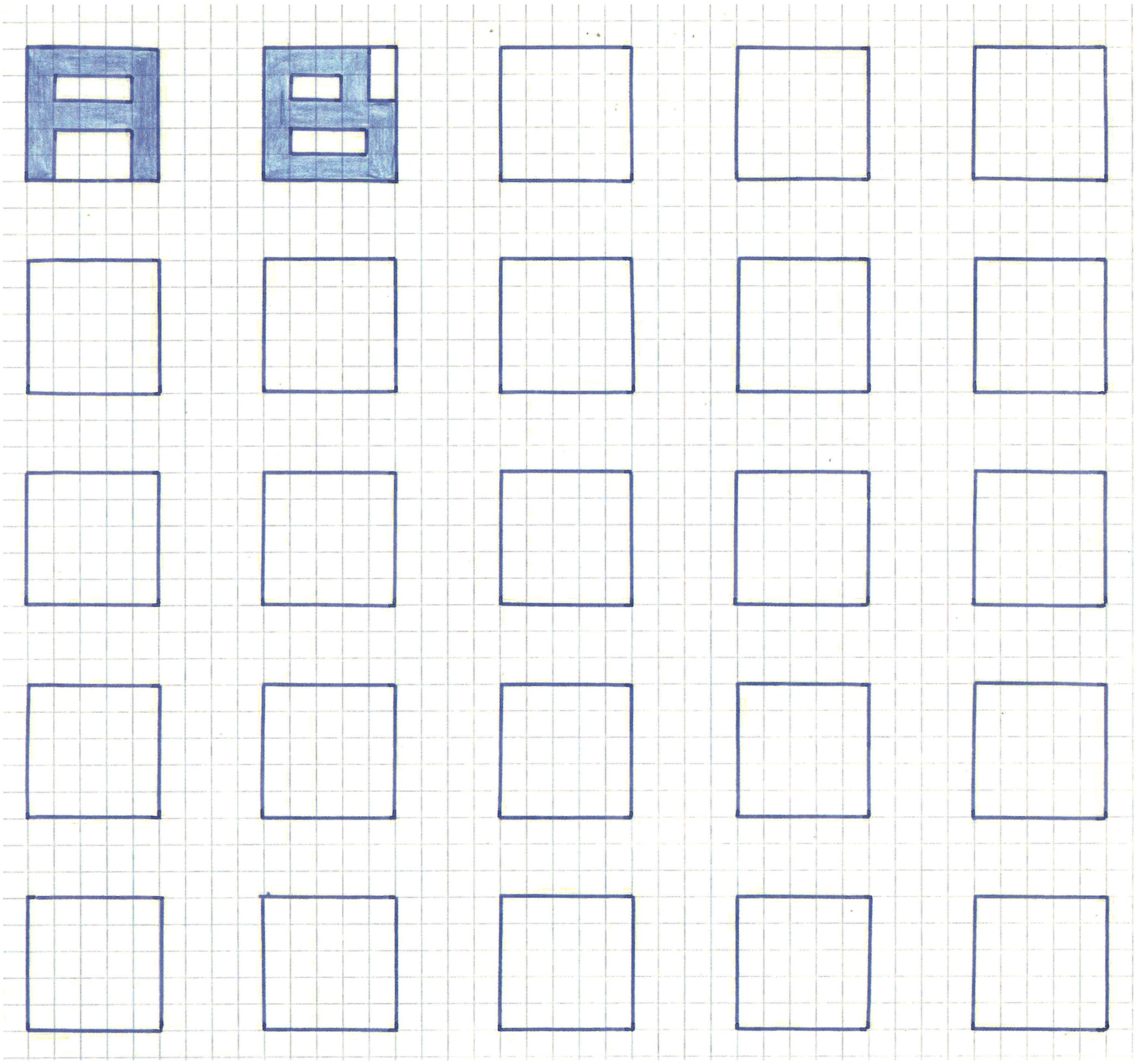
A2

	Zd.	S.	A.	V.	Zw.	E.
0						0
1						1
2					1	0

	Zd.	S.	A.	V.	Zw.	E.
32	1	0	0	0	0	0

Die Häuschenschrift – eine spielerische Anwendung des Zweiersystems A3

Bemale innerhalb jedes Quadrates beliebig viele «Häuschen», so dass alle Buchstaben des Alphabetes von A bis Z (I gilt bei dieser Aufgabe auch als J) als eindeutige, unverwechselbare und möglichst das Quadrat ausfüllende Formen entstehen, die *nur aus waagrechten oder senkrechten Balken* zusammengesetzt sind. (Wie dieser Auftrag gemeint ist, zeigen dir die ersten beiden Buchstaben.)

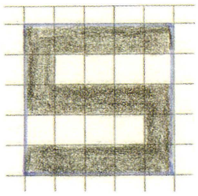


Buchstaben entstehen durch das Anwenden des Zweiersystems

A4

Mit dem Lösen dieses Arbeitsblattes kannst du beweisen, dass du die Schreibweise der Zahlen im Zweiersystem verstanden hast. Jeder Buchstabe des «Häuschenalphabetes» kann nämlich mit fünf Zehnersystemzahlen angegeben werden, wenn du sie nach folgender Anweisung ins Zweiersystem überträgst: Es sind jeweils all jene «Häuschen» auszumalen, an deren Stelle bei Schreibweise im Zweiersystem ein Strich stehen würde!

Wie du vorgehen sollst, zeigen wir dir hier am Entstehen des Buchstabens S:

Zahl im Zehnersystem:	Zahl im Zweiersystem:	Ausmalen der entsprechenden Häuschen:
31	IIIII	
16	I0000	
31	IIIII	
1	0000I	
31	IIIII	

Jetzt kannst du die folgenden drei Wörter bestimmen, die bei richtiger Lösung für sich selbst sprechen...

31	17	31	31	31	30	31
17	17	16	16	17	18	16
31	17	30	19	31	31	30
17	17	16	17	17	17	16
17	31	16	31	17	31	31

31	14	31	17	31	14	31
17	4	16	17	4	4	16
31	4	16	31	4	4	19
18	4	16	17	4	4	17
18	14	31	17	4	14	31

31	31	16	31	31	31	31
16	16	16	17	16	16	4
19	30	16	17	30	31	4
17	16	16	17	16	1	4
31	31	31	31	31	31	4

Die fünf «Wunderstreifen» A5

Wenn du die unten abgebildeten fünf Streifen mit den je sechzehn Zahlen ausschneidest und sorgfältig aufbewahrst, kannst du dich als Wahrsagerin oder Wahrsager ausgeben, denn mit diesen fünf Zahlentabellen kannst du deine Mutter, deinen Vater, deine Geschwister oder andere Personen *bestimmt verblüffen!*

Diese fünf «Wunderstreifen» bringen nämlich ahnungslose Menschen zu grossem Erstaunen, wenn du sie mit folgender Bitte überreichst: «Merke dir eine Zahl von 1 bis 31 und gib mir all jene Streifen wieder zurück, auf denen deine gedachte Zahl steht.»

Damit sind wir auch schon *bei deiner Aufgabe* angelangt: *Versuche herauszufinden,* weshalb man die gesuchte Zahl rasch bestimmt hat, wenn man *all jene Zahlen addiert, die zuoberst auf dem (oder den) erhaltenen Streifen stehen*…

1	2	4	8	16
3	3	5	9	17
5	6	6	10	18
7	7	7	11	19
9	10	12	12	20
11	11	13	13	21
13	14	14	14	22
15	15	15	15	23
17	18	20	24	24
19	19	21	25	25
21	22	22	26	26
23	23	23	27	27
25	26	28	28	28
27	27	29	29	29
29	30	30	30	30
31	31	31	31	31

Eine Ortschaft wird erraten

Schülerin 1: Wähle eine Ortschaft aus, aber nenne sie mir nicht. Auf welchen Tafeln findest du die Ortschaft? – Schülerin 2: Auf den Tafeln 1, 2, 3 und 4. Schülerin 1: Moment (Du bestimmst die Zehnerzahl [1+2+4+8 =15], nimm deine Liste hervor und du kannst deiner verblüfften Partnerin sagen)«Du hast ‹Sarnen› ausgewählt!» Immer noch unklar? Lies bei «Lösungen» zu A6.

Tafel 1

Aarau	Lausanne
Appenzell	Locarno
Arbon	Lugano
Biel	Luzern
Davos	Sarnen
Frauenfeld	Solothurn
Freiburg	Winterthur
Genf	Zug

Tafel 2

Altdorf	Locarno
Arbon	Neuenburg
Bellinzona	Olten
Biel	Rorschach
Chur	Sarnen
Davos	Solothurn
Freiburg	Winterthur
Glarus	Zürich

Tafel 3

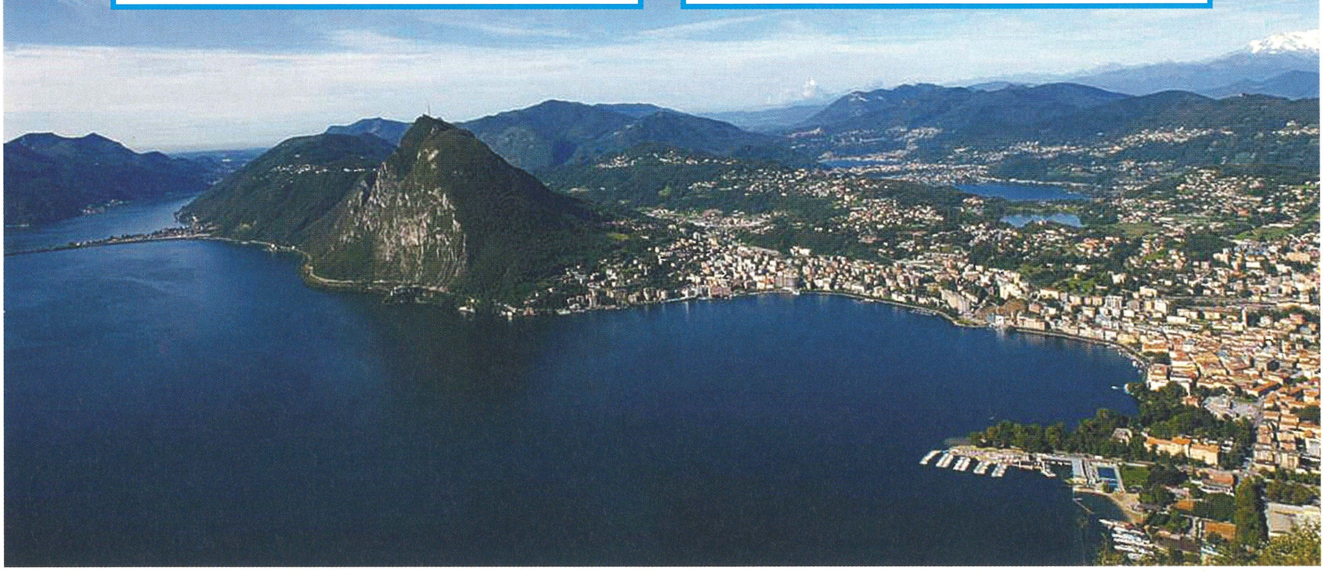
Aarau	Glarus
Appenzell	Rorschach
Arbon	St. Gallen
Basel	Sarnen
Bellinzona	Schaffhausen
Bern	Winterthur
Davos	Zug
Frauenfeld	Zürich

Tafel 4

Aarau	Luzern
Appenzell	Neuenburg
Basel	Olten
Bellinzona	Sarnen
Glarus	Schaffhausen
Interlaken	Sitten
Locarno	Solothurn
Lugano	Winterthur

Tafel 5

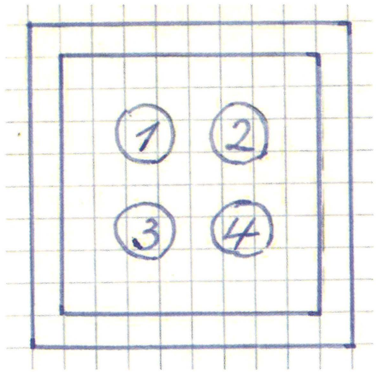
Altdorf	Lugano
Appenzell	Neuenburg
Arbon	Rorschach
Bellinzona	St. Gallen
Frauenfeld	Schaffhausen
Freiburg	Schwyz
Interlaken	Solothurn
Lausanne	Winterthur

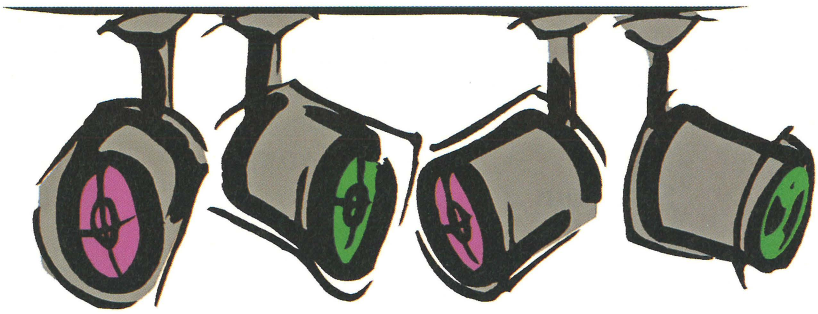


Nur vier Spotleuchten …

Eine dem Zweiersystem ähnelnde Denkaufgabe, die aber nur mit ganz anderen Überlegungen gelöst werden kann, ist das folgende Problem mit zwei Lampenfarben:

Mit rot und grün strahlenden Leuchten lassen sich bei Deckenlampen (in unserem Beispiel sind es vier Spots) unterschiedlichste Farbvarianten zuammenstellen. Dank neuester LED-Technik ist es nämlich möglich, *jede Lampe einzeln zu steuern* und so die gewünschten Farbenvarianten entstehen zu lassen …





Deine Aufgabe

Überlege dir, wie viele mögliche Belichtungsarten *mit einer* brennenden Lampe, dann *mit zwei, mit drei* oder schliesslich *mit allen vier* Spotleuchten (in den Farben Rot und Grün) möglich sind!

Zu deinem besseren Verständnis sei je ein Beispiel angefügt:

- Es strahlt nur die Lampe 4 grün (1 Spot leuchtet)
- Es strahlen die Lampen 1 und 2 rot (2 Spots leuchten)
- Es strahlen die Lampen 1 und 3 grün, die Lampe 4 rot (3 Spots leuchten)
- Es strahlen die Lampen 1 und 2 rot, die Lampen 3 und 4 grün (4 Spots leuchten)

Deine gefundenen Lösungen:

- Bei einem strahlenden Spot gibt es _____ mögliche Belichtungsarten
- Bei zwei strahlenden Spots gibt es _____ mögliche Belichtungsarten
- Bei drei strahlenden Spots gibt es _____ mögliche Belichtungsarten
- Bei vier strahlenden Spots gibt es _____ mögliche Belichtungsarten

– Insgesamt sind also _____ Beleuchtungsarten möglich!

Lösungen

A1 (Lösung S. 24 unten)

Didaktische Anregungen

Zur Vertiefung der Zahlenschreibweise im Zweiersystem sind beispielsweise folgende spielerischen Übungen möglich, die alle auf dem «Entweder-oder-Prinzip» beruhen:

a) Im Klassenverband

MAGNETZAHLEN

(an der Tafel werden verschiedenfarbige Magnete nebeneinander platziert, wobei z.B. gelten soll: rote Magnete = I, andersfarbige Magnete = 0)

ZAHLENZAHLEN

(auf der Tafel werden Ziffern im [Zehnersystem] notiert, wobei z.B. ungerade Ziffern der I, gerade Ziffern der 0 entsprechen)

SCHÜLERZAHLEN

(Mädchen und Knaben – wichtig: mit wechselnder Zuordnung von I und 0 – stellen sich vor der Klasse auf und ändern immer wieder ihre Reihenfolge)

b) Als Gruppen- oder Partnerarbeiten

FINGERZAHLEN

(gestreckte Finger bedeuten I, gebogene Finger 0. Zusatzaufgabe: Welche Zahl – im Zehnersystem geschrieben – kann höchstens mit einer Hand resp. mit beiden Händen angezeigt werden? Eine Hand: Summe der Stellenwerte von 2^0 bis 2^4; beide Hände: von 2^0 bis 2^9

FARBSTIFTZAHLEN

(Spitze nach oben → I ;Spitze nach unten → 0. Oder: gleiche Abmachung wie bei den Magnetzahlen)

BUCHSTABENZAHLEN

(Ähnlich den Zahlenzahlen – nur mit viel mehr Variationsmöglichkeiten – werden auf einem Notizblatt Wörter angegeben, von denen nach folgendem Verfahren eine Zehnersystemzahl abgeleitet werden soll: Selbstlaute = I, Mitlaute = 0. Schwieriger und eine kleine Denksportaufgabe ist die jeweilige Umformung einer «Dualzahl» in ein verständliches deutsches Wort.)

Anmerkung

Pfiffige Schüler(innen) werden wahrscheinlich rasch auf die regelmässigen Abfolgen der Nullen und Einer bei den einzelnen Stellenwerten stossen:

bei den Einern: abwechselnd 1 × 0, 1 × I (gerade/ungerade Zahlen !)
bei den Zweiern: abwechselnd 2 × 0, 2 × I
bei den Vierern: abwechselnd 4 × 0, 4 × I
bei den Achtern: abwechselnd 8 × 0, 8 × I usw.

Erkenntnis: Die Sequenzen der Nullen und Einer entsprechen stets der jeweiligen Stellenwertzahl!

A2 Zählen im Zehner- und Zweiersystem

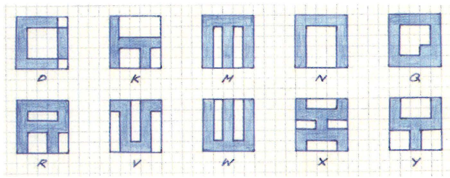
	Zd.	S.	A.	V.	Zw.	E.
0						0
1						1
2					1	0
3					1	1
4				1	0	0
5				1	0	1
6				1	1	0
7				1	1	1
8			1	0	0	0
9			1	0	0	1
10			1	0	1	0
11			1	0	1	1
12			1	1	0	0
13			1	1	0	1
14			1	1	1	0
15			1	1	1	1
16		1	0	0	0	0
17		1	0	0	0	1
18		1	0	0	1	0
19		1	0	0	1	1
20		1	0	1	0	0
21		1	0	1	0	1
22		1	0	1	1	0
23		1	0	1	1	1
24		1	1	0	0	0
25		1	1	0	0	1
26		1	1	0	1	0
27		1	1	0	1	1
28		1	1	1	0	0
29		1	1	1	0	1
30		1	1	1	1	0
31		1	1	1	1	1

	Zd.	S.	A.	V.	Zw.	E.
32	1	0	0	0	0	0
33	1	0	0	0	0	1
34	1	0	0	0	1	0
35	1	0	0	0	1	1
36	1	0	0	1	0	0
37	1	0	0	1	0	1
38	1	0	0	1	1	0
39	1	0	0	1	1	1
40	1	0	1	0	0	0
41	1	0	1	0	0	1
42	1	0	1	0	1	0
43	1	0	1	0	1	1
44	1	0	1	1	0	0
45	1	0	1	1	0	1
46	1	0	1	1	1	0
47	1	0	1	1	1	1
48	1	1	0	0	0	0
49	1	1	0	0	0	1
50	1	1	0	0	1	0
51	1	1	0	0	1	1
52	1	1	0	1	0	0
53	1	1	0	1	0	1
54	1	1	0	1	1	0
55	1	1	0	1	1	1
56	1	1	1	0	0	0
57	1	1	1	0	0	1
58	1	1	1	0	1	0
59	1	1	1	0	1	1
60	1	1	1	1	0	0
61	1	1	1	1	0	1
62	1	1	1	1	1	0
63	1	1	1	1	1	1

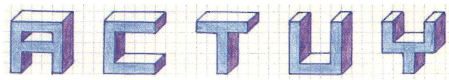
A3 Anmerkung

Nachdem die Schüler(innen) das Zweiersystem kennengelernt haben, bietet sich als besondere Übungsform für diese Zahlenschreibweise die Arbeit mit der «Häuschenschrift» an, bei der die Buchstaben durch das Ausmalen einzelner «Häuschen» in Quadraten (oder Rechtecken) entstehen. (→ Siehe Unterrichtsvorschlag: Buchstaben entstehen durch das Anwenden des Zweiersystems, A4)

Bevor aber mit dieser speziellen Geheimschrift das Zweiersystem spielerisch geübt und vertieft werden kann, sollen die Schüler(innen) alle Buchstaben (evtl. auch alle Ziffern) unterscheidbar gezeichnet haben, was durch die Bearbeitung des vorliegenden Arbeitsblattes erreicht wird. Hier zehn Vorschläge für die Gestaltung «nicht ganz einfacher» Buchstaben:



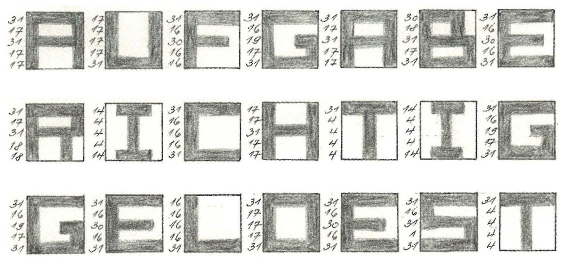
Ein zusätzlicher Anreiz für das Entwerfen solcher einzig aus «Häuschen» zusammengesetzten Buchstaben besteht auch darin, dass all diese Formen als ideale Vorlage für eine von den Schülern immer gern angewandte «dreidimensionale Titelschrift» dienen:



Möglich wäre natürlich auch, den Sch. die Aufgabe zu stellen, alle Buchstaben und Ziffern in 3 × 5-Rechtecken darzustellen, wobei aber unbedingt darauf geachtet werden muss, dass Verwechslungen folgender ähnlicher Zeichen nicht vorkommen: B und 8, G und 6, I und 1, S und 5, O und 0 sowie Z und 2.

Hier drei Vorschläge für unterschiedliche Formen:

A4



A5

Die magische Wirkung der fünf Zahlenstreifen kann leicht erklärt und verstanden werden, wenn die Schüler(innen) vorher in das Zweiersystem eingeführt worden sind. Wenn sie nämlich die Schreibweise der «dualen Zahlen» von 1 bis 31 mit den Zahlen auf den «Wunderstreifen» vergleichen, können sie feststellen:

- Auf dem ersten Streifen stehen all jene Zahlen, bei denen im Einer eine I steht, (alle ungeraden Zahlen)
- Auf dem zweiten Streifen stehen lauter solche Zahlen, bei denen im Zweier eine I steht. (Immer sind zwei Zahlen berücksichtigt, dann zwei Zahlen ausgelassen)
- Entsprechend finden wir auf dem dritten Streifen alle Zahlen mit einer I im Vierer, auf dem vierten mit einer I im Achter und auf dem fünften einer I im Sechzehner.
- Daher bezeichnet die oberste Zahl auf jedem Streifen zugleich den entsprechenden Stellenwert!

Gibt also die angesprochene Person beispielsweise die Streifen mit den obersten Zahlen 2, 4 und 16 zurück, bedeutet dies, dass die gesuchte Zahl aus einem Zweier, einem Vierer und einem Sechzehner besteht und deshalb die Zahl 22 (2 + 4 +16) ausgewählt worden ist.

Selbstverständlich kann der Zahlenbereich für diesen Zahlentrick beliebig erweitert werden – es sind einfach immer mehr Streifen nötig: Bis 63 sind es sechs Streifen, bis 127 deren sieben und bis 255 gar deren acht, denn allgemein gilt:

Bis zur Zahl $2^n - 1$ braucht man n Streifen

A6

Diese Verfahrensweise für das Herausfinden einer erdachten Zahl lässt sich natürlich in entsprechender Weise auf beliebige Gruppen von Bildchen (z. B. Tiere), Zahlen (etwa von 1011 bis 1041), Nomen (Blumen, Länder, Personennamen, Ortschaften usw.) oder von selbst erfundenen Zeichen übertragen. Allerdings müssen wir dabei immer vorgängig auf einem separaten Blatt die Zahlen von 1 bis 31, daneben beispielsweise die zum AB passenden Ortschaften notieren:

1 Genf (entspricht der I), **2** Chur (entspricht der 10), **3** Biel (entspricht der II), **4** Bern (entspricht der I00), **5** Zug (entspricht der I0I), **6** Zürich (entspricht der 110), **7** Davos (entspricht der III), **8** Sitten (entspricht der I000), **9** Luzern, **10** Olten, **11** Locarno, **12** Basel, **13** Aarau, **14** Glarus, **15** Sarnen, **16** Schwyz, **17** Lausanne, **18** Altdorf, **19** Freiburg, **20** St. Gallen, **21** Frauenfeld, **22** Rorschach, **23** Arbon, **24** Interlaken, **25** Lugano, **26** Neuenburg, **27** Solothurn, **28** Schaffhausen, **29** Appenzell, **30** Bellinzona, **31** Winterthur

Diese 31 notierten Städtenamen verteilen wir dann entsprechend den dualen Zahlen alphabetisch und in Sechzehnergruppen auf fünf Tafeln, nämlich so, wie es A6 zeigt:

Genf (I) nur auf Tafel 1, Chur (10) nur auf Tafel 2, Biel (II) auf die Tafeln 1 und 2, Bern (I00) nur auf Tafel 3, Zug (I0I) auf die Tafeln 1 und 3 usw.

Weil ja auf diesen Tafeln keine Zahlenreihen stehen, müssen wir uns die Bedeutung der einzelnen Tafeln (d. h. deren Stellenwerte im Zweiersystem) gut einprägen:

**Tafel 1 = Einer, Tafel 2 = Zweier, Tafel 3 = Vierer,
Tafel 4 = Achter, Tafel 5 = Sechzehner**

Erhalten wir also beispielsweise die Tafeln 1, 2, 3 und 5 zurück, können wir daraus die Zehnerzahl (1 + 2 + 4 + 16 =) 23 bestimmen, womit die gesuchte Ortschaft gemäss der anfänglich erstellten Liste Arbon heissen muss!

Zweite Anregung: Mit dem «Erraten einer Ortschaft» ist den Schüler(inne)n der besondere Aufbau des Zweiersystems noch vertrauter geworden, weshalb sich folgender «Ausflug auf die Denkspielwiese», mit dem die Einsicht und das Verständnis für ein weiteres Zahlen-System – das Dreiersystem – entwickelt werden kann, (vor allem auf der Oberstufe) bestimmt lohnt.

Zu Beginn der Lektion erhält jede Schülerin und jeder Schüler ein Blatt, auf dem die folgenden sechs Streifen mit je neun Zahlen abgebildet sind. Als Partneraufgabe soll auch bei diesen Tabellen der «Trick» herausgefunden werden, wie die erdachte Zahl wiederum lediglich durch das Nennen der entsprechenden Streifennummer(n) herausgefunden werden kann…

1	2	3	4	5	6
1	2	3	6	9	18
4	5	4	7	10	19
7	8	5	8	11	20
10	11	12	15	12	21
13	14	13	16	13	22
16	17	14	17	14	23
19	20	21	24	15	24
22	23	22	25	16	25
25	26	23	26	17	26

Lösungsidee: Um die Besonderheit der Zahlenverteilung auf den sechs Streifen herauszufinden, schauen wir am besten einmal, auf welchen Streifen die ersten sieben Zahlen vorkommen:

die 1: nur auf dem Streifen 1
die 2: nur auf dem Streifen 2
die 3: nur auf dem Streifen 3
die 4: auf den Streifen 3 und 1
die 5: auf den Streifen 3 und 2
die 6: nur auf dem Streifen 4
die 7: auf den Streifen 4 und 1

Aus dieser Zusammenstellung lässt sich ableiten:

- Die Zahlen 4 und 5 werden aus einem Dreier {Streifen 3) und 1 (resp. 2) Einer(n) (Streifen 1 und 2) gebildet, weshalb die kleinsten zwei Stellenwerte nur Einer und Dreier heissen können.
- Die 3 auf dem Streifen 3 muss daher dem Stellenwert 3 entsprechen, (siehe oben)
- Die 1 besteht folglich aus einem, die 2 aus zwei Einern. (Streifen 1 und 2)
- Die 6 wird daher aus zwei Dreiern, die 7 aus zwei Dreiern (beide Mal Streifen 4) und einem Einer (Streifen 1) gebildet.

Auf spielerische Weise haben wir damit den Übergang vom Zweier- zum Dreiersystem vollzogen, und die Schüler(innen) sollten in der Lage sein, die Zahlen von 1 bis 26 im Dreiersystem (erlaubt sind nur die drei Ziffern 0, 1 und 2) aufschreiben zu können:

Zahl im Zehnersystem:	Stellenwerte im Dreiersystem:		
	$3^2 = 9$ Neuner	$3^1 = 3$ Dreier	$3^0 = I$ Einer
1			I
2			2
3		I	0
4		I	I
5		I	2
6		2	0
7		2	I
8		2	2
9	I	0	0
10	I	0	I
11	I	0	2
12	I	I	0
13	I	I	I
14	I	I	2
usw.			

Wie beim Zweiersystem ist natürlich auch beim Dreiersystem bei den senkrechten Ziffernreihen je nach Stellenwert eine besondere Abfolge der drei Ziffern zu erkennen. (Einer: jede Ziffer 1×, Dreier: jede Ziffer 3×, Neuner: jede Ziffer 9× usw.)

Sind alle Zahlen im Dreiersystem untereinander aufgeschrieben, wird rasch klar, wie sich die Zahlen auf die einzelnen Streifen verteilen:

- die Zahlen auf dem Streifen 1 enthalten alle einen Einer (Wert 1)
- die Zahlen auf dem Streifen 2 enthalten alle zwei Einer (Wert 2)
- die Zahlen auf dem Streifen 3 enthalten alle einen Dreier (Wert 3)
- die Zahlen auf dem Streifen 4 enthalten alle zwei Dreier (Wert 6)
- die Zahlen auf dem Streifen 5 enthalten alle einen Neuner (Wert 9)
- die Zahlen auf dem Streifen 6 enthalten alle zwei Neuner (Wert 18)

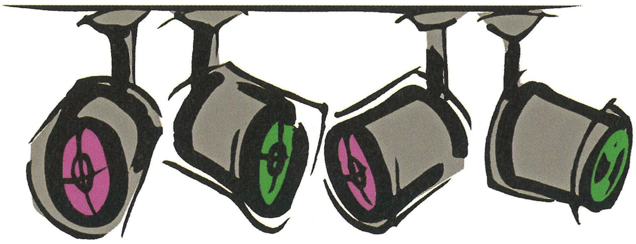
Die ausgesuchte Zahl lässt sich daher auch bei diesen Streifen durch die Addition der genannten «Streifenzahlen» bestimmen. (Aber Achtung: Die Werte der Streifen 4, 5 und 6 entsprechen **nicht den Streifenzahlen** und müssen deshalb gut auswendig gelernt werden!)

Dazu zwei Beispiele:

Die gemerkte Zahl kommt auf den Streifen 2 und 5 vor: Streifen 2 (bedeutet 2) plus Streifen 5 (bedeutet 9 [!]) → die gesuchte Zahl heisst 11

Die gemerkte Zahl kommt auf den Streifen 2, 4 und 6 vor: Streifen 2 (bedeutet 2) plus Streifen 4 (bedeutet 6 [!]) plus Streifen 6 (bedeutet 18 [!]) → die gesuchte Zahl heisst 26

A7
Vorbemerkung: Um die Erläuterungen zu vereinfachen, werden leuchtende rote Spots mit R, leuchtende grüne Spots mit G bezeichnet



Eine Spotleuchte brennt

Varianten für R: 1/2/3/4 →	4 Möglichkeiten
Varianten für G: 1/2/3/4 →	4 Möglichkeiten
	Total: 8 Varianten

Zwei Spotleuchten brennen
Es bestehen die sechs Varianten:
1+2/1+3/1+4/2+3/2+4/3+4 («4 tief 2»)

falls beide Zahlen R →	6 Möglichkeiten
falls beide Zahlen G →	6 Möglichkeiten
falls erste Zahl rot/zweite Zahl grün	6 Möglichkeiten
falls erste Zahl grün/zweite Zahl rot →	6 Möglichkeiten
	Total: 24 Varianten

Zwischenbemerkung: Mit lediglich einem oder zwei brennenden Spots könnten also bereits alle 26 Buchstaben (und zusätzlich gar sechs Satzzeichen !) codiert werden. (26 + 6 = 8 + 24)

Drei Spotleuchten brennen
Es bestehen die vier Varianten:
1+2+3/1+2+4/1+3+4/2+3+4 («4 tief 3»)

falls alle drei Zahlen R →	4 Möglichkeiten
falls alle drei Zahlen G →	4 Möglichkeiten
falls erste Zahl G/restliche beiden Zahlen R	4 Möglichkeiten
falls zweite Zahl G/restliche beiden Zahlen R →	4 Möglichkeiten
falls dritte Zahl G/restliche beiden Zahlen R →	4 Möglichkeiten
Entsprechende 3×4 Möglichkeiten für 1 R mit 2 G →	12 Möglichkeiten
	Total: 32 Varianten

Vier Spotlampen brennen

Entweder 4 R oder 4 G →	2 Möglichkeiten
Varianten für 3 R mit 1 G: siehe bei drei Spotleuchten →	4 Möglichkeiten
Varianten für 3 G mit 1 R: ebenso →	4 Möglichkeiten
Varianten für 2 R und 2 G: siehe bei zwei Spotleuchten → (2 R und 2 G ergänzen sich gegenseitig)	6 Möglichkeiten
	Total: 16 Varianten

Insgesamt sind also unglaubliche **80 (!) verschiedene Beleuchtungsarten** möglich. (8 + 24 + 32 + 16 = 80)

Übrigens: Wahrlich echte Knacknüsse können Sie Ihren Schüler(inne)n vorsetzen, wenn Sie die Anzahl der Spotlampen und/oder die Anzahl der Farben erhöhen …