

**Fächerübergreifend, auch mit Internet**

# Magische Quadrate

Unter einem magischen Quadrat ist ein Quadrat, in dem die Zahlen derart angeordnet sind, dass die Summe jeder Reihe, Spalte und Diagonale eine gleichbleibende Zahl ist, die sogenannte "magische Zahl" zu verstehen.

Was sind magische Quadrate?  
Die Zahlen 1 bis 16 lassen sich auf vielerlei Arten so in einem 4x4-Quadrat anordnen, dass

- jede der vier Zeilensummen,
- jede der vier Spaltensummen
- und auch jede der beiden Diagonalsummen denselben Wert hat.

2	14	11	7	34
16	9	4	5	34
1	8	13	12	34
15	3	6	10	34
34	34	34	34	34

Eine solche Anordnung von Zahlen nennt man ein magisches Quadrat (oder auch ein Zauberquadrat). Die gemeinsame Zeilen-, Spalten- und Diagonalsumme heisst magische Konstante des Quadrats. Die magische Konstante eines 4x4-Quadrats mit den Eintragungen 1 bis 16 beträgt:

$$\frac{\text{Summe aller Zahlen des Quadrats}}{\text{Anzahl der Zeilen}} = \frac{1+2+3+ \dots +16}{4} = \frac{136}{4} = 34$$

Überprüfen, ob ein vorgegebenes Zahlenquadrat ein magisches Quadrat ist. Durch Nachrechnen der Zeilen-, Spalten- und Diagonalsummen kann die Klasse überprüfen, ob ein vorgegebenes Zahlenquadrat aus den Zahlen 1 bis 16 ein magisches 4x4-Quadrat ist.

Fehlende Zahlen in unvollständig vorgegebenen magischen 4x4-Quadraten ergänzen

16	6	9	
	11	8	14
	13	2	

Es empfiehlt sich, die vorgegebene Anordnung mit Zahlenkarten nachzulegen und das Quadrat dann Schritt für Schritt mit den restlichen Zahlenkarten zu vervollständigen.

16	6	9	3
1	11	8	14
	13	2	

In der ersten Zeile ergibt sich  $16+6+9 = 31$ , es fehlt also die Zahl 3 auf die Zeilensumme 34. Genauso ergänzt man die drei Zahlen der zweiten Zeile mit der Zahl 1 auf 34.

16	6	9	3
1	11	8	14
	13	2	
	4	15	

Auch in der zweiten Spalte und in der dritten Spalte sind jeweils drei Zahlen bekannt, so dass man die fehlende vierte Zahl 4 bzw. 15 durch Ergänzen auf 34 bestimmen kam.

16	6	9	3
1	11	8	14
	13	2	
10	4	15	5

Da ausserdem jede der beiden Diagonalsummen 34 betragen muss, kann man auch hier die fehlenden Zahlen 10 und 5 bestimmen. Nun kann man noch die erste Spalte mit 7 und die letzte Spalte mit 12 auf 34 ergänzen

### Seit wann gibt es magische Quadrate?

Sorry, meine Klasse hat nur eine Zeittafel auf Englisch gefunden. Aber mit Google Translator oder anderen Übersetzungsprogrammen kannst du das Wichtigste leicht heraus schreiben. Vielleicht gibst du ein Suchwort, z.B. «Theon of Smyrna» oder «Cornelius Agrippa») ins Internet, wenn du mehr über diese Person erfahren möchtest. Seit über 4000 Jahren gibt es magische Quadrate! Cool, mehr darüber zu erfahren!

Magic squares have fascinated mankind throughout the ages, with examples being found in:

- Chinese literature dating from as early as 2800 B.C., when a magic square known as the «Loh-Shu», or «scroll of the river Loh», was invented by Fuh-Hi, the mythical founder of Chinese civilisation
- Greek writings dating from about 1300 B.C.
- the works of Theon of Smyrna in 130 A.D.
- use by Arabian astrologers in the ninth Century when drawing up horoscopes
- Arabic literature, written by Abraham ben Ezra, dating from the eleventh Century
- India, dating from the eleventh or twelfth Century, where the earliest fourth order magic square was found, in Khajuraho
- the writings of the Greek mathematician, Emanuel Moschopolus, whose works now reside in the National Library in Paris
- more recently, magic squares appeared in Chinese literature during the latter part of the posterior Chou dynasty (951–1126 A.D.) or the beginning of the Southern Sung dynasty (1127–1333 A.D.)
- the works of Cornelius Agrippa, a German physician and theologian from the sixteenth Century, who constructed seven magic squares, of orders three to nine inclusive, which he associated with the seven planets then known (including both the sun and the moon)
- art, with the relatively well-known magic square which can be found in Albert Dürer's engraving «Melencolia», where the date of its creation, 1514 AD, may be seen in the centre two cells of the bottom row
- a detailed French work, published in 1838 A.D.

They were also frequently found in various cultures, for example, Egypt and India, engraved on stone or metal and worn as talismans, the belief being that magic squares had astrological and divinatory qualities.

Nachforschungen zur obersten Zeile ergaben:

### Das magische Quadrat Lo-Shu

Der chinesischen Überlieferung nach tauchte dereinst im 3. Jahrtausend v.Chr. eine Schildkröte aus dem legendären Fluss Lo auf, die auf ihrem Rücken neun in einem Quadrat angeordnete Zahlen trug. Dieses Gittermuster fand eine Entsprechung in den acht Trigrammen, die um einen zentralen Punkt angeordnet waren. Die neun Grundzahlen sind dabei so verteilt, dass ihre Addition in jeder beliebigen Richtung stets 15 ergibt – die Zahl der Tage, die es dauert,

bis aus dem Neumond ein Vollmond geworden ist. Die Anordnung der Grundzahlen in einem Quadrat mit neun Feldern wurde als Lo-Shu-Quadrat bekannt.

SO	S	SW		
	4	9	2	
O	3	5	7	W
	8	1	6	
NO	N	NW		

### Warum schmuggelte Albrecht Dürer vor über 500 Jahren ein magisches Quadrat in seinen Kupferstich?

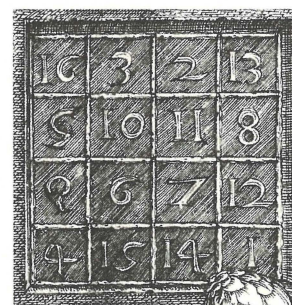
Unsere Schülerinnengruppe notierte folgende Arbeitsschritte:

- Im Internet ein grösseres Bild «Melencolia» suchen und ausdrucken.
- Bild genau beschreiben. Im Internet suchen, was andere übers Bild aufgeschrieben haben.
- Dem Kupferstich fünf andere passende Titel geben.
- Das magische Quadrat im Bild genau analysieren. (Warum wohl so ein Quadrat als Wandschmuck unter der Glocke? Warum tragen Frauen magische Quadrate als Amulett um den Hals?)

### Das magische Quadrat von Albrecht Dürer

Eines der berühmtesten magischen Quadrate ist in Albrecht Dürers Kupferstich *Melencolia I* zu finden. Das Dürer-Quadrat hat folgende Eigenschaften:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1



Detail aus *Melencolia I*.

- Es ist ein symmetrisches magisches Quadrat. Die Summe der Zahlen in senkrechten oder waagerechten Reihen ergibt immer \_\_\_\_ Rechne!
- Die Summe der beiden mittleren Diagonalen ergibt \_\_\_\_
- Die Summe der Elemente der vier Quadranten ist jeweils die magische Zahl \_\_\_\_
- Die Summe der vier Eckfelder und der vier Zentrumsfelder ist jeweils \_\_\_\_
- Die Summe der vier einander gegenüberliegenden mittigen Randfelder ist jeweils \_\_\_\_ (5+9+8+12 und 3+2+15+14).
- Die Summe der vier Felder, die jeweils von den vier Eckfeldern um 1 oder um 2 im Uhrzeigersinn weiterversetzt werden, ist jeweils \_\_\_\_ (8+14+9+3 und 12+15+5+2).
- Die Summe der in Form eines Drachenvierecks angeordneten Elemente (z.B. 2+10+8+14; 3+9+7+15) ist \_\_\_\_

- Die Summe der ersten beiden Zahlen einer Zeile (also z.B. der ersten) und der letzten beiden der gespiegelten (also z.B. der letzten) Zeile (z.B.  $16+3+14+1$ ) ergibt \_\_\_\_  
Dies gilt entsprechend auch für Spalten (z.B.  $3+10+7+14$ ).
- Die Zahlen der beiden mittleren Zeilen oder Spalten in Zickzack-Reihenfolge ergeben \_\_\_\_ (z.B.  $3+11+6+14$  oder  $9+10+7+8$ ).
- In der Mitte der letzten Zeile erscheint die Jahreszahl 1514, das Jahr, in dem Dürer den Stich anfertigte.
- Am Anfang der letzten Zeile steht eine 4, am Ende eine 1. Setzt man diese Ziffern mit Buchstaben des Alphabets gleich, erhält man D und A, das Monogramm des Künstlers (Dürer Albrecht)

**Goethe ist einer der bekanntesten Dichter.**

Er schrieb auch ein Theaterstück «Faust». Darin kommt auch eine Hexe vor, die das berühmte Hexeneinmaleins den Zuschauern zuruft. Haben wohl viele gemerkt, dass auch das ein magisches Quadrat ergibt? In unserer Klasse hat eine Schülerin den Originaltext fünfmal langsam vorgelesen, erst nachher bekamen wir das Blatt mit den kleinen Lösungshilfen. Konnten bei euch alle Gruppen die Zahlen ins magische Quadrat einsetzen? Vor wie vielen hundert Jahren verzauberte schon diese Zahlenmagie die Menschen?

## Das Hexeneinmaleins aus Goethes «Faust»

**Du musst versteh'n,  
aus Eins mach Zehn.  
Die Zwei lass geh'n.  
Die Drei mach gleich,**

Also kommt in die erste Reihe: 10, 2, 3

**So bist du reich.**

Reich an Wissen, denn man weiss jetzt schon: die Summe muss immer \_\_\_\_ ergeben.

**Verlier die Vier!  
Aus Fünf und Sechs,  
So sagt die Hex,  
Mach Sieben und Acht,**

Aha, also in die zweite Reihe: 0, 7, 8 – und siehe da, die Summe ist wieder \_\_\_\_ Rechne!

**So ist's vollbracht:**

Es ist erst fast vollbracht, aber man hat jetzt alles zusammen, um die dritte und letzte Reihe zu erstellen: die «verlorene Vier» taucht wieder auf, sodass sich 5, 6, 4 ergibt. Die Summe \_\_\_\_ Rechne!

**Und Neun ist Eins,**

Diese neun Felder ergeben ein magisches Quadrat

**Und Zehn ist keins.**

... und magische Quadrate mit zehn Feldern gibt es nicht.

**Das ist das Hexeneinmaleins!**

			<b>=</b>
			<b>=</b>
			<b>= 15</b>
<b>= 15</b>	<b>=</b>	<b>=</b>	

Na, war es schwer?

# Viermal 4x4 Zahlen

A1

Wenn du die oberen drei Zahlenquadrate fehlerfrei lösen und die beiden Fragen zum vierten Zahlengitter richtig beantworten kannst, bist du wahrlich ein «Hirsch» in der Mathematik!

1 Setze in die leeren Mittelfelder vier Zahlen so ein, dass danach die Summen aller Reihen (waagrecht) und Spalten (senkrecht) 36 betragen.

4	14	7	11
12			10
11			3
9	10	5	12

2 Diesmal sollst du zusätzlich auch die vier «Eckenzahlen» eintragen – und zwar so, dass diesmal nicht nur die Summen aller Reihen und Spalten, sondern auch der beiden Diagonalen stets 36 betragen ...

	8	14	
12			10
4			10
	8	6	

3 Ergänze das Zahlengitter mit vier Zahlen derart, dass nachher alle Zahlen des Gitters in einem logischen Zusammenhang zueinander stehen!

4	5	3	1
6	15	23	27
6	27		
10	43		

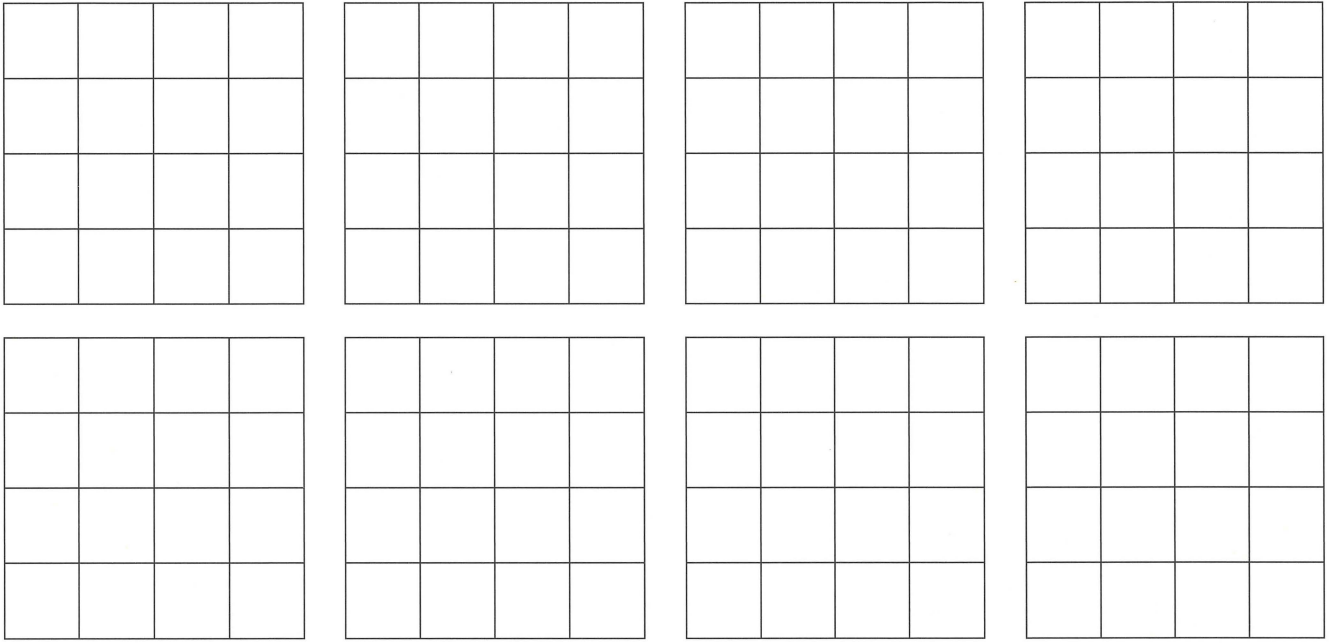
4 Ob du – zum Abschluss – diese zwei Fragen beantworten kannst?

**Welche Beziehung besteht zwischen der untersten Zahl (5218) und den über ihr stehenden drei vierstelligen Zahlen?**

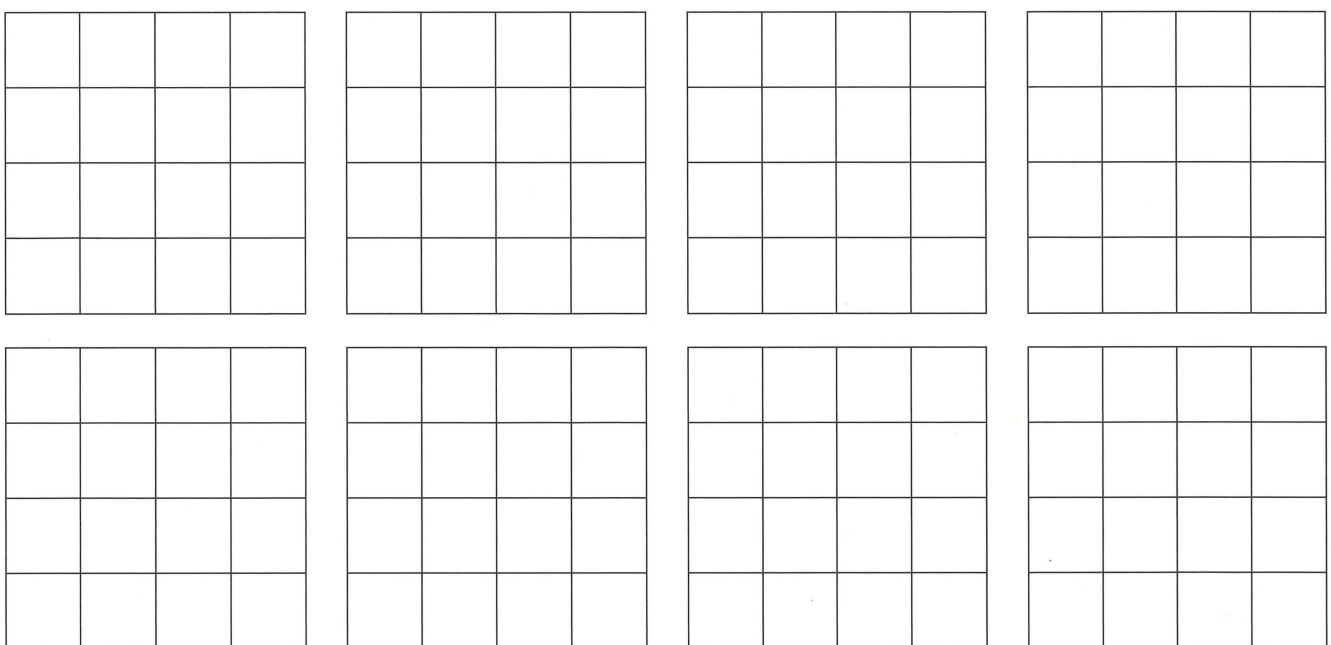
2	0	9	1
1	9	2	1
1	4	0	6
5	2	1	8

**Warum sind alle Ziffern um 45° «gedreht» worden?**

**1** Halbiere die acht Gitterquadrate auf lauter verschiedene Arten in zwei gleich grosse (und zwingenderweise auch gleich aussehende) *Teilflächen*! (Achtung: Bei sechs Lösungen sollen die Unterteilungen immer nur den Gitterlinien entlang erfolgen, bei den restlichen zwei Lösungen laufen die geraden Striche nirgends den vorgegebenen Linien entlang.)



**2** Wiederum sollst du die acht Gitterquadrate aufteilen – diesmal aber so, dass vier gleich grosse und gleich aussehende *Teilflächen* entstehen! (Achtung: Bei der Hälfte der Lösungen sollen die Unterteilungen erneut ausschliesslich den Gitterlinien entlang erfolgen, während es dir bei den restlichen Lösungen erlaubt ist, die Trennungslinien *längs den Gitterlinien* und / oder durch die kleinen Quadrätchen zu zeichnen.)



**Bei allen 16 Lösungen gelten Drehungen und Spiegelungen natürlich nicht als verschiedene Unterteilungen!**

# Magische Quadrate mit je vier Wörtern

Bestimmt hast auch du schon einmal sprachliche magische Quadrate gelöst, indem du jeweils vier Nomen eingesetzt hast, die waagrecht und senkrecht gleich lauteten. Für die Lösungen unserer sieben Rätsel notierst du am besten nur Grossbuchstaben und schreibst sie überall so in die Mitte der Felder, dass sie die Begrenzungslinien nicht berühren.

1 Als Lösungshilfe sind unter dem Gitter alle Buchstaben angegeben, die du einsetzen musst.


Wiesepflanze

Wettrennen

Nachtvogel

Kletterpflanze

A E E E E E E F  
F K L L L U U U


Apfelsaft

Ansiedelungen

Ausdrucksart

Schweizer Freiheitsheld

E E I L L L M O  
O R S S T T T T

2 Jetzt werden dir die einzusetzenden Buchstaben nicht mehr genannt


Strick

Mädchenname

Mädchenname

Bürde


Ortschaft in der Nähe von Scuol

Pastenbehälter

Kains Bruder

Trumpfneun beim Jassen

3 Schliesslich sollst du die noch freien Felder so ergänzen, dass sinnvolle magische Quadrate entstehen.

	E		K
E		H	
	H		R
K		R	

A	U	G	E
U			
G			
E			

E	I		
I			
			A
		A	U

(Die Lösungen sind alles Nomen)

5	6	7	8	9	10	11	12
		1	2	3	4		
13	14	15	16	17	18	19	20

- |                            |  |
|----------------------------|--|
| 1 Teil des Gesichtes       | 11 Sils im Engadin (romanisch)                     |
| 2 Sohn von Adam und Eva    | 12 Mädchenname                                     |
| 3 Strick, Leine            | 13 kalter Nordwind                                 |
| 4 Unterarmknochen          | 14 Stacheltier                                     |
| 5 braucht man zum Anbraten | 15 pastenartige Speisewürze                        |
| 6 arabischer Fürstentitel  | 16 weiblicher Naturgeist                           |
| 7 Mädchenname              | 17 Mädchenname (vor allem in Deutschland geläufig) |
| 8 Gangart des Pferdes      | 18 menschlicher Körper                             |
| 9 weibliche Verwandte      | 19 Küchengerät                                     |
| 10 Knabename               | 20 eine der Gezeiten                               |

### Didaktischer Hinweis für alle Spiele mit Einzelwörtern

Mit Sprache spielen kann man erst, wenn man sie einigermaßen beherrscht. Unsere Sprache ist meist eine Satzsprache. *Daher mit allen Einzelwörtern ganze Sätze bilden, damit klar wird, dass die Jugendlichen das Wort verstehen und auch in den eigenen Wortschatz integrieren können.* Ist eine Aufgabe zu schwierig, hilft oft Partnerarbeit. Die Lösungswörter können auch verstreut an die Wandtafel geschrieben werden, und vielleicht noch einige Wörter dazu, die nicht dazugehören. Einzelne Buchstaben können auch schon vor dem Kopieren von der Lehrperson in die richtigen Felder geschrieben werden für die schwächere Klassenhälfte.

# Lösungen

## A1

1

4	17	7	11
12	6	8	10
11	6	16	3
9	10	5	12

2

14	8	14	0
12	2	12	10
4	18	4	10
6	8	6	16

3

4	5	3	1
6	15	23	27
6	27	65	115
10	43	139	319

Jede Zahl, die links von ihr, oberhalb von ihr und diagonal links über ihr eine Nachbarzahl hat, ist so gross wie die Summe dieser drei Zahlen.

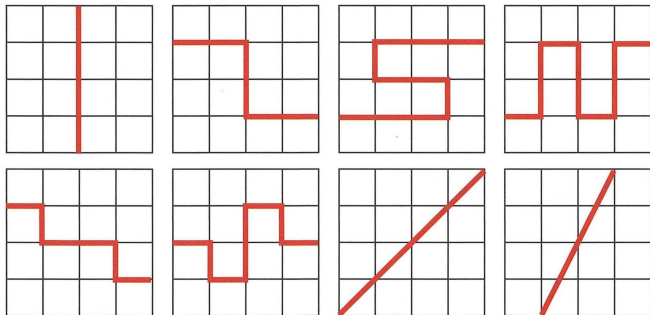
(Beispiel:  $15 = 6 + 5 + 4$ )

4 Die Zahl 5218 ist die Summe der über ihr stehenden drei vierstelligen Zahlen: ( $5218 = 2091 + 1721 + 1406$ )

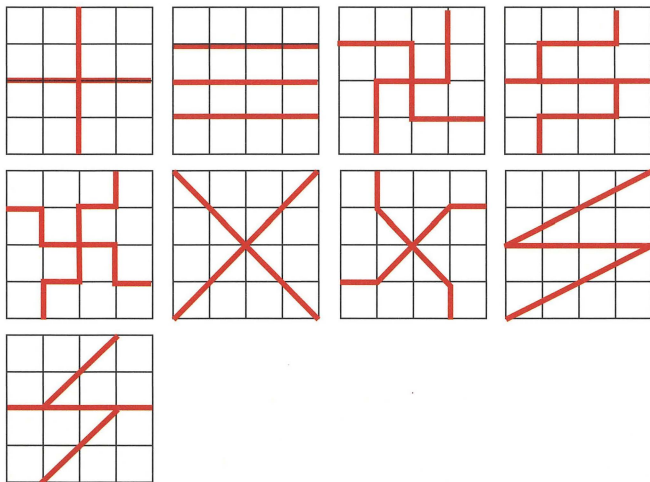
Dies gilt ebenfalls bei Drehung des Blattes um  $90^\circ$  – deshalb auch die seltsame Schreibweise der Ziffern... ( $8611 = 5112 + 2470 + 1029$ )

## A2

1 Die acht Halbierungen sehen so aus:



2 Bei den Viertlungen sind sogar neun Lösungen möglich:



## A3

K	L	E	E	M	O	S	T	S	E	I	L	F	T	A	N
L	A	U	F	O	R	T	E	E	R	N	A	T	U	B	E
E	U	L	E	S	T	I	L	I	N	E	S	A	B	E	L
E	F	E	U	T	E	L	L	L	A	S	T	N	E	L	L

R	E	C	K
E	C	H	O
C	H	O	R
K	O	R	N

A	U	G	E
U	F	E	R
G	E	L	D
E	R	D	E

E	I	B	E
I	N	E	S
B	E	T	A
E	S	A	U

Bei schlechten Klassen alle Lösungswörter an der Wandtafel anbieten. Und mit jedem Wort einen Satz bilden!

## Anmerkungen

1 Sprachlich besonders wertvoll und förderlich ist es, die Schüler(innen) eigene magische Quadrate erfinden zu lassen, die sie nachher der Klasse mit den von ihnen gewählten Umschreibungen zum Lösen präsentieren dürfen. (Günstig auch als freiwillige HA)

2 Eine Steigerung dieses Austüftelns von magischen Quadraten besteht darin, wenn die Schüler(innen) versuchen, an ein erstes herausgefunden magisches Quadrat ein zweites gleich anzuschliessen! (Ein Viertel überlappt sich jeweils.) Dazu zwei Beispiele:

B	R	E	I
R	O	H	R
E	H	R	E
I	R	E	N
	I	D	E
M	E	E	R

T	I	E	R
I	G	L	U
E	L	C	H
R	U	H	E
	E	G	E
	F	E	L

3 Eine bei den Schüler(inne)n immer wieder beliebte Wettbewerbsform besteht darin, ein beliebiges vierbuchstabiges Wort vorzugeben, worauf es darum geht, wer dieses Wort zuerst in vier magische Quadrate einbauen kann – und zwar an allen vier möglichen Stellen ... Dazu ein Beispiel mit dem Nomen «GLAS»:

G	L	A	S	E	G	G	E	I	N	G	E	B	E	R	G
L	I	F	T	G	L	A	S	N	E	L	L	E	M	I	L
A	F	F	E	G	A	B	E	G	L	A	S	R	I	T	A
S	T	E	G	E	S	E	L	E	L	S	A	G	L	A	S

A4 Besonders knifflig wird das Austüfteln von magischen Quadraten, wenn an ein erstes (bereits erstelltes!) magisches Quadrat vier weitere derartige Quadrate angefügt werden sollen. Die besondere Schwierigkeit für die Lösungsfindung dieser Quadrate besteht darin, dass bei jedem Quadrat bereits vier Buchstaben (und dies immer wieder in einem anderen Viertel!) vorgegeben sind, weshalb eine solche sprachliche Knobelaufgabe nur angebracht ist für sprachlich wirklich begabte Oberstufenschüler(innen) mit deutlich erkennbarer Affinität für Worträtsel ... Erlaubt – ja, sogar erwünscht – für das Ausarbeiten sind die Benützung von Duden, Wörterbuch, Postleitzahlenbüchlein und Schweizerkarte. Selbstverständlich werden auch alle Wortarten und -formen sowie einfache französische, englische und italienische Wörter akzeptiert!

F	E	T	T	B	A	S	E
E	M	I	R	A	X	E	L
T	I	N	A	S	E	G	L
T	R	A	B	E	L	L	A
B	I	S	E	I	L	S	E
I	G	E	L	L	E	I	B
S	E	N	F	S	I	E	B
E	L	F	E	E	B	B	E

10	2	3	= 15
0	7	8	= 15
5	6	4	= 15
= 15	= 15	= 15	

Lösungen Einleitung Magisches Quadrat von Albrecht Dürer: Immer Zahl 34 einsetzen. Hexeneinmaleins bei Goethe: