Unterrichtsvorschlag

Phantastische Bandornamente

Abbildungsgeometrie ist schon lange ein fester Bestandteil in unseren Lehrplänen. Dabei gehören die Kongruenzabbildungen – insbesondere die Achsenspiegelung, die Drehung und die Punktspiegelung – zum Stoffbereich der Sekundarstufe I. Beim Untersuchen und Herstellen von Bandornamenten werden die Achsenspiegelung und die Punktspiegelung (oder Drehung um 180°) intensiv benutzt. Ausserdem treten die Verschiebung (Translation) und die Gleitspiegelung als weitere Kongruenz erhaltende Abbildungen auf ganz natürliche Art in Erscheinung. Das alltagsbezogene Thema «Bandornamente» und damit die folgenden Arbeitsblätter eignen sich also gut als Ergänzung, Vertiefung und Repetition.

Christian Rohrbach

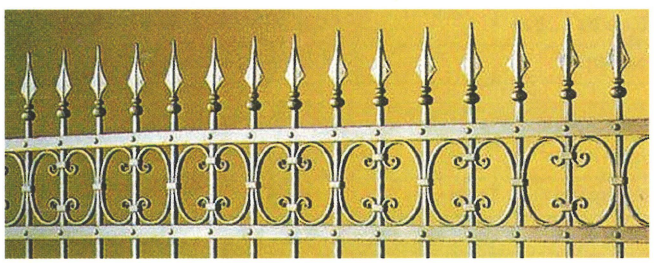
Was sind Bandornamente?

Betrachtet man Beispiele, ist es offensichtlich: Bei einem Bandornament wiederholt sich ein Muster in einem Parallelstreifen in beiden Richtungen beliebig oft. Jedes Bandornament lässt sich also durch eine Verschiebung (Parallelverschiebung oder Translation) zur Deckung bringen; ein Bandornament kann aber noch andere Deckabbildungen aufweisen: Achsenspiegelung quer zur Bandrichtung, Achsenspiegelung in Längsrichtung an der Mittelparallelen, Punktspiegelung an Punkten auf der Mittelparallelen und Gleitspiegelung. Untersucht man das genauer und lässt man alle Kombinationen dieser Deckabbildungen zu, so stellt sich heraus, dass es genau sieben verschiedene Bandtypen gibt.

Bänder aus dem Stoffhandel.

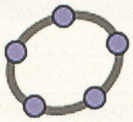
Entwürfe für Dekorationsbänder.

Band oder Fries in einem Gebäude.



Gartenzaun.

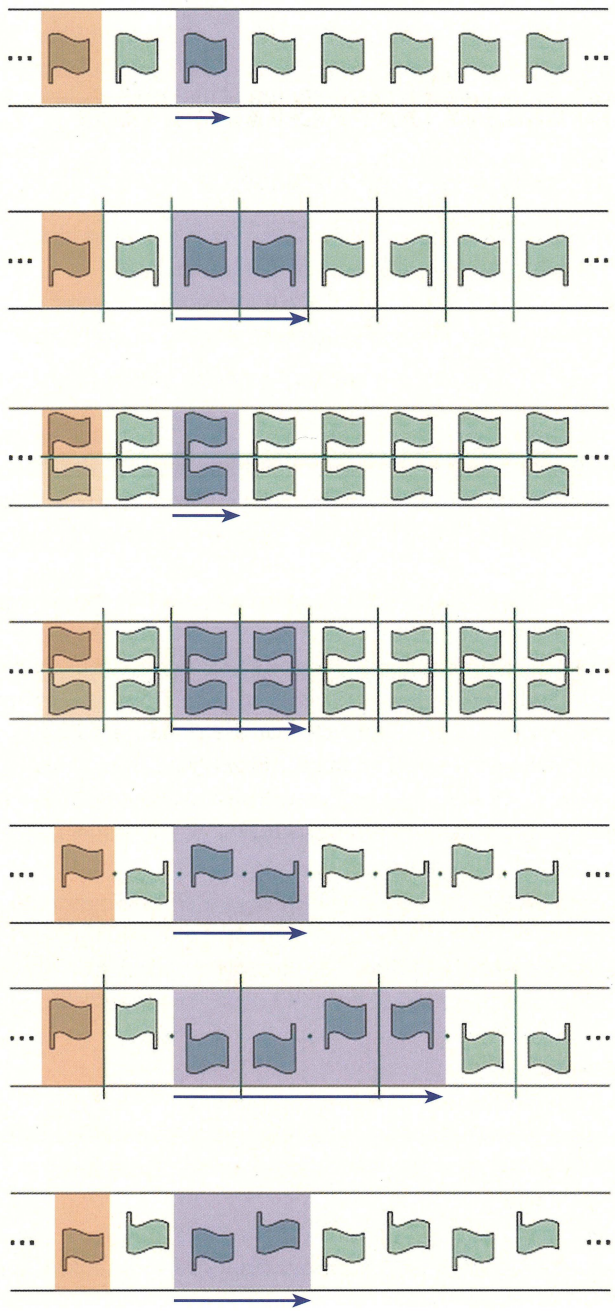
Antike Vase.



Mit diesem Symbol sind die elektronischen, dynamischen Geometrie-«Arbeitsblätter» gekennzeichnet. Sie können auf dem Internet unter folgender Adresse abgerufen werden:

www.christianrohrbach.net

Der dafür benützte Internet-Browser muss HTML5-kompatibel sein.



Typ ①: nur Verschiebung (Translation)

Typ ②: Achsenspiegelung quer

Typ ③: Achsenspiegelung längs mit Verschiebung

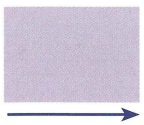
Typ ④: Achsenspiegelung quer und längs

Typ ⑤: Punktspiegelung

Typ ⑥: Achsenspiegelung quer und Punktspiegelung

Typ ⑦: Gleitspiegelung

Jedes Bandornament kann durch Verschiebung zur Deckung gebracht werden. Die minimale Verschiebungsstrecke ist blau angegeben.

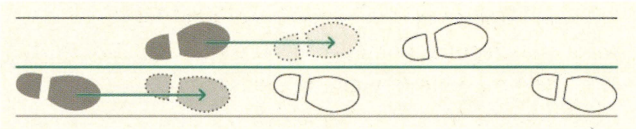


Der sogenannte «Baustein» des Bandornaments ist rot markiert. Bei Typ ③ und Typ ④ – beide achsensymmetrisch in Längsrichtung – genügt ein halber Baustein, um das Bandornament zu erzeugen.

Schaut man noch etwas genauer hin, so entdeckt man, dass

- Typ ④ zusätzlich auch punktsymmetrisch ist: Zwei Achsenspiegelungen mit zueinander senkrecht stehenden Achsen ergeben ja immer eine Punktspiegelung,
- Typ ③, Typ ④ und Typ ⑥ zusätzlich auch die Gleitspiegelung als Deckabbildung aufweisen.

Was ist das, eine Gleitspiegelung?
Verschiebt man eine Figur und spiegelt sie anschliessend an einer Achse parallel zur Verschieberichtung, so zeigt die zusammengesetzte Gesamtbewegung der Figur das, was eine Gleitspiegelung (Schubspiegelung oder Gleitwendung) bewirkt. Fussspuren im Schnee oder im Sand kann man sich durch eine Gleitspiegelung entstanden denken.



Das dynamische Geometrie-«Arbeitsblatt» zeigt diesen Prozess anschaulich.

Gleitspiegelung

Zusammenhang zwischen den Kongruenzabbildungen
Die zentrale Rolle unter den fünf Kongruenzabbildungen spielt die Achsenspiegelung. Die anderen vier sind letztlich nur «Spiegelungs-Zusammensetzungen», also hintereinander ausgeführte Achsenspiegelungen. Mit den dynamischen «Arbeitsblättern» können das die Schülerinnen und Schüler selber herausfinden.

Die Punktspiegelung setzt sich zusammen aus zwei Achsenspiegelungen, deren Achsen senkrecht stehen. Der Schnittpunkt ist das Zentrum der Punktspiegelung.

Zusammenhang Achsenspiegelung – Punktspiegelung

Die Drehung setzt sich ebenfalls aus zwei Achsenspiegelungen zusammen. Der Schnittpunkt der Achsen ist das Drehzentrum der Drehung. Der Drehwinkel ist doppelt so gross wie der Winkel zwischen den beiden Achsen.

Das wiederum macht deutlich dass die Punktspiegelung ein Spezialfall einer Drehung ist, einer Drehung um 180°.

Zusammenhang Achsenspiegelung – Drehung

Die Verschiebung (Translation) setzt sich aus zwei Achsenspiegelungen zusammen, deren Achsen parallel sind.

Zusammenhang Achsenspiegelung – Verschiebung

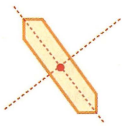
Die Gleitspiegelung setzt sich zusammen aus einer Verschiebung und einer Achsenspiegelung mit zur Verschieberichtung paralleler Achse. Damit ist die Gleitspiegelung insgesamt eine Zusammensetzung dreier Achsenspiegelungen – zwei haben parallele Achsen, die Achse der dritten Spiegelung steht senkrecht zu den beiden anderen Achsen.

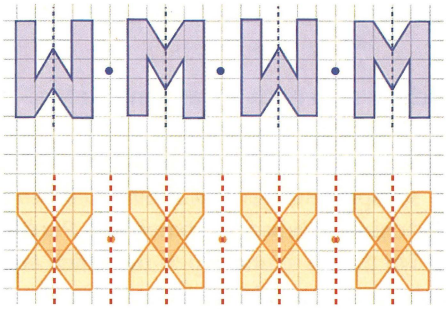
Warum Bandornamente im Unterricht?
Bandornamente treten im Alltag auf und sind für eine mathematisch gehaltvolle Untersuchung durchaus Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I zugänglich. Sie bieten Anlass zu forschend-entdeckendem Lernen und zu fächerübergreifendem Arbeiten, in dem zum Beispiel selber Bandornamente gestaltet werden. Die ästhetische Komponente des Themas dürfte eine nicht zu unterschätzende motivationale Wirkung zeitigen.
Werden zudem die einsichtsfördernden dynamischen «Arbeitsblätter» aus dem Internet benützt, wird ein enaktiver, also handelnder Zugang zum Thema geboten, der sich lernpsychologisch als vorteilhaft erweisen wird. Es geht dabei nicht um einen Einstieg in die Thematik «Kongruenzabbildungen», es wird vielmehr erwartet, dass die Schülerinnen und Schüler die Achsenspiegelung, die Drehung und die Punktspiegelung bereits einmal kennengelernt haben. Bei einer spiral-curricularen Unterrichtsplanung könnte das Thema «Bandornamente» also durchaus zur Repetition, Vertiefung und Ausweitung der Thematik «Kongruenzabbildungen» angegangen werden.
Bei der Behandlung des Themas «Bandornamente» geht es nicht um das konstruktive Bewältigen der Kongruenzabbildungen, sondern vielmehr um deren Eigenschaften, Unterschiede und Zusammenwirken. Verständnisförderung und das Mathematisieren (ganz im Sinne des Lehrplanes 21) stehen also im Vordergrund.
Die Arbeitsblätter sind am sinnvollsten chronologisch in der angebotenen Reihenfolge einzusetzen. Nachfolgend wird jedes Arbeitsblatt mit ein paar Hinweisen zu Ziel und Verwendung sowie zu den Lösungen vorgestellt.

Arbeitsblatt «Achsen- und Punktspiegelung» A1
Mit symmetrischen Buchstabenformen wird auf diesem Arbeitsblatt kurz je eine wichtige Eigenschaft der Achsenspiegelung beziehungsweise Punktspiegelung aufgefrischt:
– Originalpunkt und Bildpunkt liegen auf Geraden durch das Spiegelzentrum beziehungsweise senkrecht zur Spiegelachse.
– Spiegelachse beziehungsweise Spiegelpunkt halbieren die Verbindungsstrecken von Original- mit Bildpunkt.

Für das Analysieren bestehender und das Kreieren eigener Bandornamente sind das die zentralen Eigenschaften.

Zur Aufgabe 5: Weil die gelbe Figur selber punktsymmetrisch ist, könnte man die Figurenreihe allein mit Achsenspiegelungen erzeugen.





Will man intensiver auf die beiden Kongruenzabbildungen Achsenspiegelung und Punktspiegelung eingehen, so können dazu die folgenden dynamischen Geometrie-«Arbeitsblätter» beigezogen werden:

Achsensymmetrische Figur 1

Achsensymmetrische Figur 2

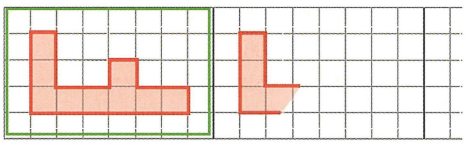
Punktsymmetrische Figur 1

Punktsymmetrische Figur 2

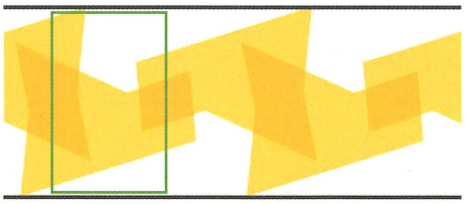
Punktsymmetrische Figur 3

Arbeitsblatt «Sieben Bänder» A2

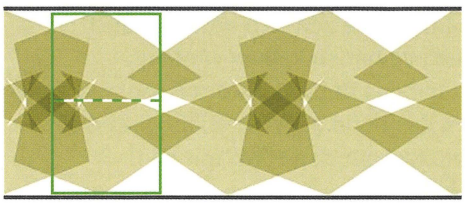
Vor der Bearbeitung muss geklärt werden, was unter einem «Baustein» des Bandornaments zu verstehen ist. Auf dem Arbeitsblatt ist das unmittelbar klar; die Einteilung macht es deutlich.



Das ist dann allerdings nicht mehr so offensichtlich, sobald die Einteilung nicht vorhanden ist und die Figuren auf den Bausteinen «nahtlos» ineinander übergehen.



Unter einem Baustein soll also immer ein rechteckiger Ausschnitt aus dem Bandornament über die volle Breite des Bandes verstanden werden. Der Ausschnitt soll minimal sein, in dem Sinne, dass er in sich nicht punktsymmetrisch oder achsensymmetrisch in Querrichtung ist. Er kann höchstens eine Achsensymmetrie in Längsrichtung aufweisen; dann genügt zur Erzeugung des Bandornaments auch ein halber Baustein, was bei den beiden Typen ③ und ④ der Fall ist.



Auf dem Arbeitsblatt erzeugen die Schülerinnen und Schüler mit zwei übersichtlichen, einfachen Bausteinen (Buchstabe F respektive A) je ein Beispiel für jeden der sieben Bandtypen. Es empfiehlt sich, die Arbeit im Klassenverband auszuwerten und unter anderem Fragen wie den folgenden nachzugehen:

- Was ist das Gemeinsame der beiden Bandtypen ③ und ④? (Antwort: Achsenspiegelung in Längsrichtung)
- Tritt die Punktspiegelung ausser bei den Bandtypen ⑤ und ⑥ auch sonst noch auf? (Antwort: bei Bandtyp ④)
- Wie kann man die Bewegung bei Bandtyp ⑦ beschreiben? (Antwort: Verschiebung und Achsenspiegelung längs; der Begriff der «Gleitspiegelung» kann eingeführt werden und das elektronische Arbeitsblatt «Gleitspiegelung» beigezogen werden.)
- Welche anderen Bandtypen ausser Typ ⑦ kommen ebenfalls mit einer Gleitspiegelung auf sich selber zu liegen? (Antwort: Typ ③, Typ ④ und Typ ⑥ bei den Typen ④ und ⑥ muss für die Gleitspiegelung ein «Doppel-Baustein» benützt werden)

Dass Bandornamente vom Typ ④ neben den beiden Achsensymmetrien auch Punktsymmetrie aufweisen, kann mit diesem dynamischen Geometrie-«Arbeitsblatt» entdeckt werden:

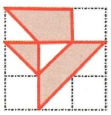
Punktspiegelung bei Typ …

Arbeitsblatt «Bänder zum Üben» A3

Für jeden Bandornament-Typ enthält dieses Arbeitsblatt nochmals ein Band auf dem Hintergrund eines Häuschenrasters. Die Zuordnung zu den Typen sollte daher verhältnismässig einfach sein.

Lösung der Zuordnungsaufgabe:
Band A – Typ ①
Band B – Typ ⑦
Band C – Typ ⑤
Band D – Typ ⑥
Band E – Typ ④
Band F – Typ ③
Band G – Typ ②

Der Baustein aller Bandornamente hat prinzipiell diese Form:



Vergleicht man allerdings die von links her ersten Bausteine im gezeigten Ausschnitt aus den nach beiden Seiten unendlichen Bänder, so sieht man dass die obige Form
- bei Band B quer gespiegelt und
- bei Band G längs gespiegelt ist.

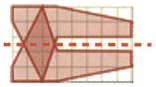
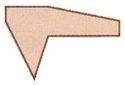
Bei den Bändern E und F kommt der Baustein verkleinert wieder vor; hier besteht der ganze Baustein aus zwei längs gespiegelten und aneinandergesetzten solchen Formen.

Die 3. Aufgabe zielt auf die Metaebene des Nachdenkens über die eigene Arbeit; der Lehrplan 21 verlangt beim Handlungsaspekt «Erforschen und Argumentieren» dieses Reflektieren vermehrt.

Arbeitsblatt «Bandornamente» A4

Bei diesem Arbeitsblatt wird die Aufgabenstellung gegenüber dem Arbeitsblatt «Sieben Bänder» umgekehrt: Der Baustein ist nicht vorgegeben, sondern muss zuerst bestimmt werden. Bei den Bändern A, B, D, F und G dürfte das einfach sein. Bei den anderen wird man gern durch die Formen auf den Bändern in die Irre geleitet.

Band C: nicht und auch nicht

Band E:  nicht 

Band H: nicht

Band I: nicht

Die Bänder sind von folgendem Typ:

Band A – Typ ⑤
Band B – Typ ②
Band C – Typ ④
Band D – Typ ①
Band E – Typ ③
Band F – Typ ⑦
Band G – Typ ⑥
Band H – Typ ⑤
Band I – Typ ⑦

Die Bearbeitung des Arbeitsblattes verlangt Flexibilität, Abstraktionsvermögen, die Bereitschaft, sich immer wieder neu zu orientieren, und die Fähigkeit zur Strukturübertragung – alles wichtige Ziele, die über die fachmathematischen hinausgehen.

Arbeitsblatt «Die sieben Typen» A5

Die Bandornamente stammen aus dem Alltag und passen daher nicht mehr in einen Quadrathäuschenraster. Die Aufgabe gewinnt an Realitätsnähe, dürfte aber darum von höherem Schwierigkeitsgrad sein. Auch muss man von kleinen Abweichungen zwischen den Bausteinen abstrahieren können (siehe zum Beispiel Bandornament G).

Lösung der Zuordnungsaufgabe:

Band A – Typ ③
Band B – Typ ⑥
Band C – Typ ⑦
Band D – Typ ④
Band E – Typ ⑤
Band F – Typ ②
Band G – Typ ①

Mit dem dynamischen Geometrie-«Arbeitsblatt» kann herausgefunden werden, dass eine Verschiebung (Translation) ersetzt werden könnte durch zwei Achsenspiegelungen quer, deren eine Achse in der Mitte des Bausteins und die andere am Rand des Bausteins verläuft:

Verschiebung bei Bandornamenten

Arbeitsblatt «Computerbänder» A6

Die Bandornamente sind auf dem Computer entstanden. Dennoch dürfte die Bestimmung des Bausteins nicht ganz einfach sein, denn die Muster und Formen gehen über die Genzen der Bausteine hinweg und es hat keinen Raster im Hintergrund. Da die Achsensymmetrie aus dem Alltag am besten bekannt ist, fällt sie bei diesen Bändern vermutlich am ehesten auf und kann als Orientierungshilfe und Ausgangspunkt benützt werden. Bänder, die als Deckabbildung neben der Verschiebung lediglich die Gleitspiegelung aufweisen (Band B und Band E), werden vermutlich schwierig zu typisieren sein, da man mit der Gleitspiegelung am wenigsten vertraut ist.

Die Bänder sind von folgendem Typ:

Band A – Typ ②
Band B – Typ ⑦
Band C – Typ ①
Band D – Typ ⑤
Band E – Typ ⑦
Band F – Typ ④
Band G – Typ ⑤
Band H – Typ ⑥
Band I – Typ ④
Band K – Typ ③

Mit Hilfe der dynamischen Arbeitsblätter können die Schülerinnen und Schüler mit Bildschirmfotos selber ähnliche Arbeitsblätter herstellen und sich gegenseitig zum Lösen geben.

Bandornament Typ 1

Bandornament Typ 2

Bandornament Typ 3

Bandornament Typ 4

Bandornament Typ 5

Bandornament Typ 6

Bandornament Typ 7

Alle sieben Bandornamente

Hinweise zu diesen elektronischen «Arbeitsblättern»:
- Reale Bandornamente setzen sich natürlich auch nach links weiter; sie haben keinen «Anfang». Für die Beurteilung des Aussehens des Bandornaments darf man darum das Band auf dem Bildschirm erst rechts, nach der erzeugenden Form mit den roten Punkten betrachten.

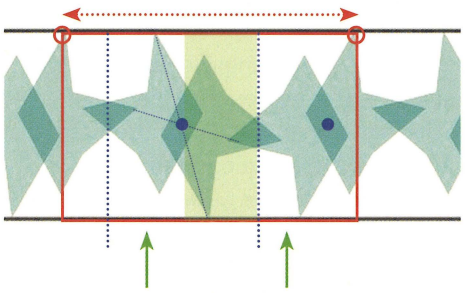
– Der rote Pfeil gibt nicht die Länge der Verschiebung an, mit der das Bandornament auf sich selber zu liegen kommt (siehe Übersicht Seite 39), sondern ist eine technische Gestaltungshilfe zur Verschiebung der farbigen «Form» und nicht des Bausteins des Bandornaments.

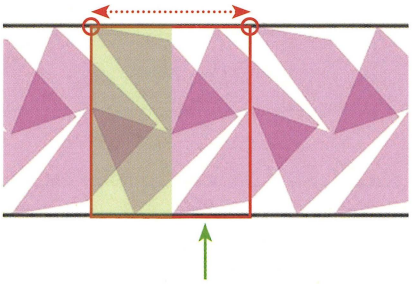
– Zum Finden des rechteckigen Bausteins geht man so vor wie auf dem Arbeitsblatt «Computerbänder». Die eine Seite des Rechtecks entspricht der Breite des Bandes. Die andere Seite des Bausteins aber ist bei einigen Bändern schwieriger zu bestimmen. Man kann zum Beispiel so vorgehen:

  Mit einer charakteristischen Ecke bestimmt man, wo sich die Form wiederholt, und zwar in der gleichen Lage und Orientierung. So erhält man auch die (echte) Verschiebung, also die Deckabbildung des Bandes. Der Baustein ist sicher kleiner oder gleich dem dadurch bestimmten «Verschieberechteck» (unten rot angeben).

  Nun sucht man nach Achsen von Achsenspiegelungen und Zentren von Punktspiegelungen der Figur (blau). Findet man weder Achsen noch Zentren, so könnte noch eine Gleitspiegelung vorliegen und der Baustein ist halb so gross wie das «Verschieberechteck».

  Der Baustein kann ausser einer Achse in Längsrichtung des Bandes keine Achsen oder Zentren enthalten (grün). Beim Festlegen des Bausteins stellt man fest, dass er in seiner Lage nicht eindeutig festgelegt ist – er kann auch in gespiegelter Lage eingezeichnet werden (grüne Pfeile). Man kann auch feststellen, dass die Länge der «flexiblen» Seite des roten «Verschieberechtecks» ein Vielfaches der Länge der «flexiblen» Seite des grünen Bausteins ist (oben das Vierfache, unten das Zweifache).





… und die Flächenornamente, die Parkettierungen?
Die zweidimensionalen Muster haben gegenüber den eindimensionalen Bändern sehr viel mehr «Freiheitsgrade». Wenn man nur schon jene Parkette betrachtet, die als Deckabbildungen zwei unabhängige Verschiebungen in zwei Richtungen zulassen (periodische Parkettierungen), so gibt es 17 verschiedene Typen. Hier einen Überblick zu erhalten, wird wohl für die Sekundarstufe 1 kaum möglich sein. Das Thema «Parkettierungen» lädt dafür zu anderen reizvollen Untersuchungen ein, zum Beispiel dem Nachvollzug des Aufbaus von M.-C.-Escher-Parketten oder dem Parkettieren mit Pentominos oder Würfelnetzen.

Mit den überschaubar vielen Typen von Bandornamenten hingegen gelingt es, jedes im Alltag vorkommende Bandornament klassifizieren zu können. Was hingegen hier nicht geleistet werden kann, ist, den Nachweis zu erbringen, dass es nicht mehr als sieben Typen gibt. Mit der Diskussion über weitere Deckabbildungen als den charakterisierend aufgeführten Symmetrien der einzelnen Bandornamente (siehe Seite 39) ist man aber bereits nahe daran. In diesem Sinne ist das Thema auch in späteren Schuljahren im Zusammenhang zum Beispiel von Gruppentheorie durchaus erweiterbar.

Christian Rohrbach

Literatur

Keller, F., et al
«Mathematik 1–3»
Lehrwerk für Arithmetik, Algebra, Geometrie, Sachrechnen und Stochastik für die 1. bis 3. Sekundarklasse, 2011–2013, Lehrmittelverlag Zürich;
http://www.mathematik-sek1.ch/

Affolter, W., et al
«mathbu.ch»
Mathematik im 7. Schuljahr für die Sekundarstufe I
Berner Lehrmittel- und Medienverlag, Bern, und Klett und Balmer, Zug, 2002

Rohrbach, Ch.
«Dynamische Geometrie per Applets»
In: die neue schulpraxis, Heft 10, 2008, St. Galler Tagblatt AG, St. Gallen

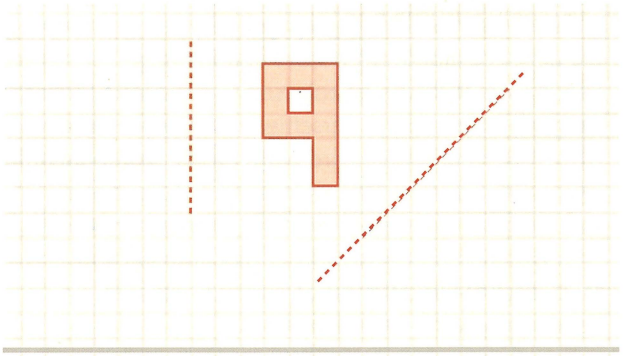
Walser, H.
Bandornamente und Flächenornamente (Modul 204; Mathematik für die Sekundarstufe 1)
Universität Basel, 2009, www.math.unibas.ch/~walser

Scharlau, W.
Die Xistá von Pyrgí
(Ortschaft auf der griechischen Insel Chios)
Havixbeck, 2001, http://www.scharlau-online.de/diverses.html (Stand 2013)

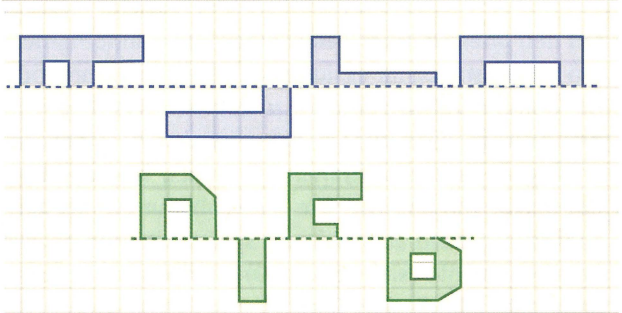
Arbeitsblatt «Achsen- und Punktspiegelung»

A1

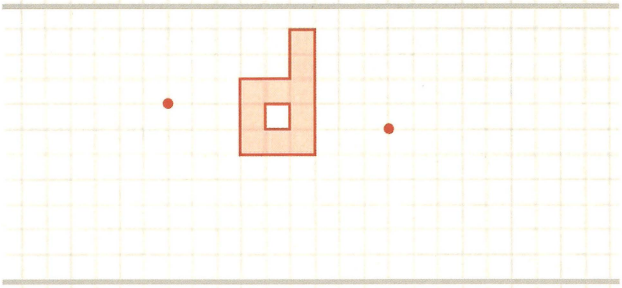
1.



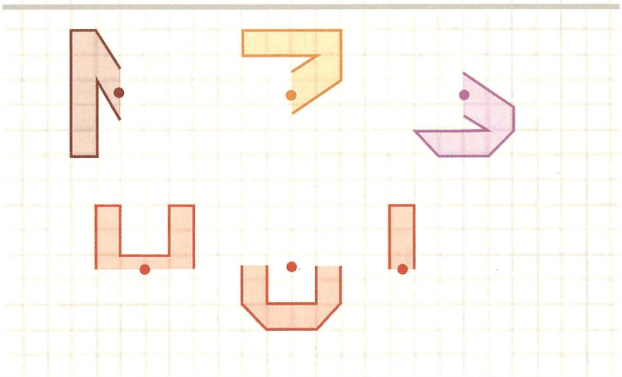
2.



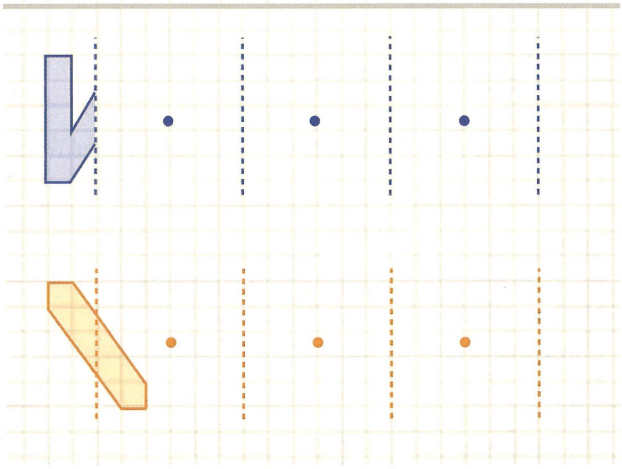
3.



4.



5.



1. – Spiegle die rote Figur an beiden roten Spiegelachsen.
– Beschreibe, wie ein Originalpunkt und der gespiegelte Punkt bezüglich der Spiegelachse liegen:

2. Spiegle die blauen und die grünen Figuren an der blauen beziehungsweise grünen Spiegelachse.

3. – Spiegle die rote Figur an beiden roten Punkten, den Spiegelzentren.
– Beschreibe, wie ein Originalpunkt und der gespiegelte Punkt bezüglich des Spiegelzentrums liegen:

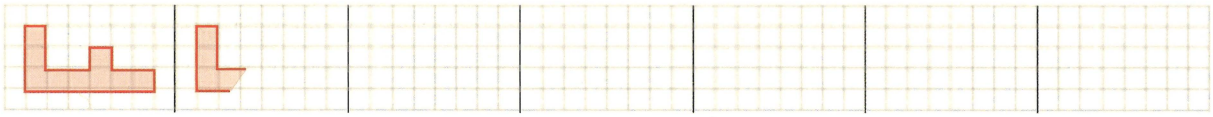
4. Spiegle die Figuren an den gleichfarbigen Spiegelzentren.

5. – Spiegle die blaue beziehungsweise gelbe Figur nacheinander zuerst an den gleichfarbigen Spiegelachsen, dann an den Spiegelzentren, danach wieder an der nächsten Spiegelachse usw.
– Warum könnte man bei der gelben Figurenreihe statt der Spiegelzentren genauso gut Spiegelachsen parallel zu den gegebenen verwenden? Warum geht das bei der blauen Figurenreihe nicht?

Arbeitsblatt «Sieben Bänder»

A2

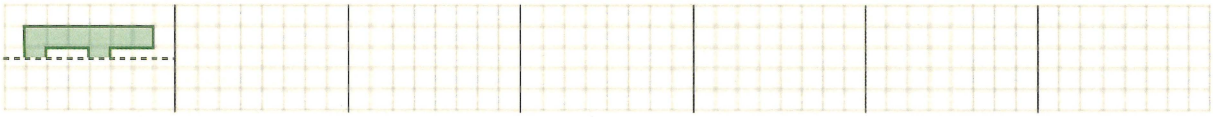
Setze den rechteckigen Baustein in der gleichen Lage immer wieder rechts an.

① 

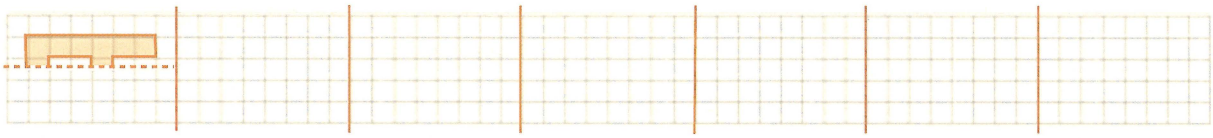
Spiegle den Baustein beim Ansetzen an der rechten Kante.

②

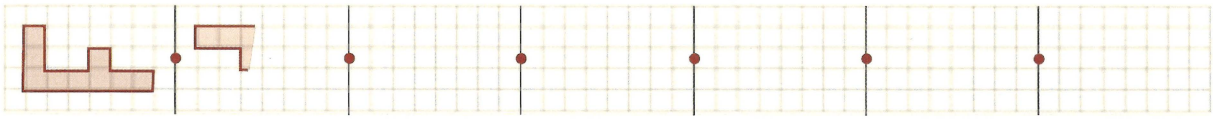
Spiegle den halben Baustein zuerst an der gestrichelten Achse, dann mache das Gleiche wie bei ①.

③ 

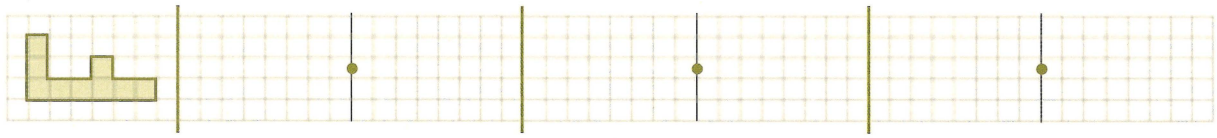
Spiegle den halben Baustein zuerst an der gestrichelten Achse, dann mache das Gleiche wie bei ②.

④ 

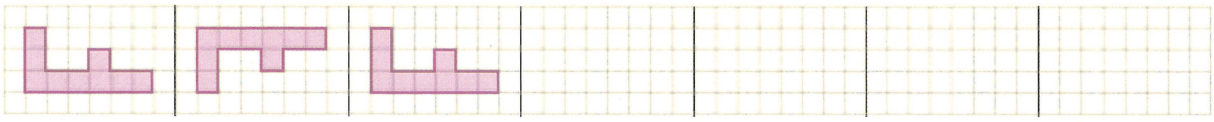
Punktspiegle den Baustein am Mittelpunkt der Kante.

⑤ 

Kombiniere Achsenspiegelung und Punktspiegelung.

⑥ 

Führe das begonnene Bandornament nach der Gesetzmässigkeit weiter.

⑦ 

Entwirf ein eigenes Bandornament.

Zu welchem Typ ① bis ⑦ passt dein eigenes Bandornament? ◯

Arbeitsblatt «Bänder zum Üben»

A3

1. – Markiere den rechteckigen Baustein, aus dem das Bandornament aufgebaut ist. Unterteile den Baustein, wenn die Hälfte genügt.
– Zeichne die Zentren von Punktspiegelungen und die Achsen von Achsenspiegelungen ein.
– Vergleiche mit dem Arbeitsblatt A1 und notiere rechts den Typ des Bandes.

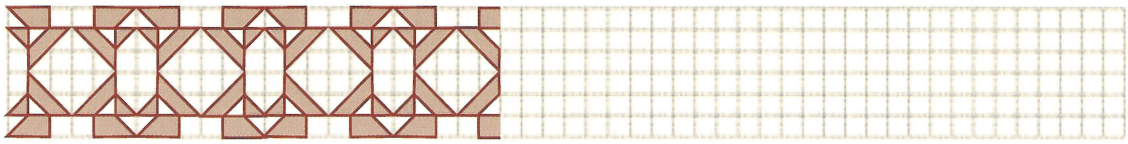
Typ

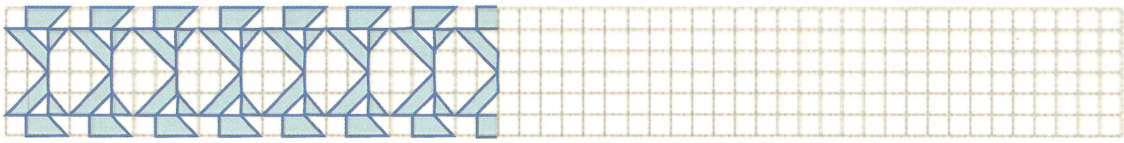
A ○

B ○

C ○

D ○

E  ○

F  ○

G ○

2. Was fällt dir auf, wenn du die Bausteine dieser sieben Bandornamente vergleichst?

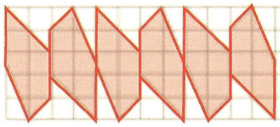
3. Für welche Bandornamente konntest du den Typ schnell und einfach finden; bei welchen hast du mehr überlegen und suchen müssen? Suche Gründe für deine Einschätzungen.

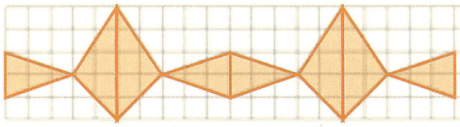
Arbeitsblatt «Bandornamente»

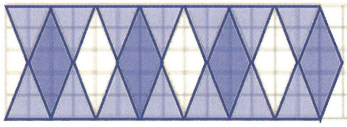
A4

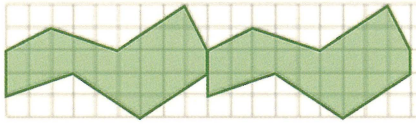
– Markiere den rechteckigen Baustein, aus dem das Bandornament aufgebaut ist. Unterteile den Baustein, wenn die Hälfte genügt.
– Zeichne das Bandornament nach rechts weiter.
– Vergleiche mit dem Arbeitsblatt A1 und notiere rechts den Typ.

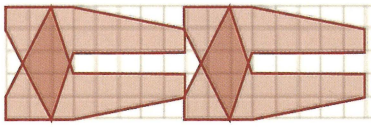
Typ

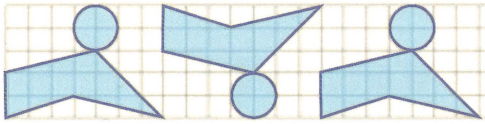
A 

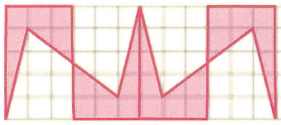
B 

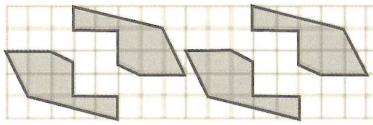
C 

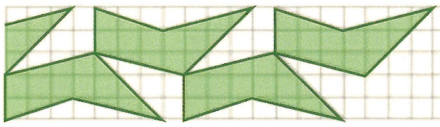
D 

E 

F 

G 

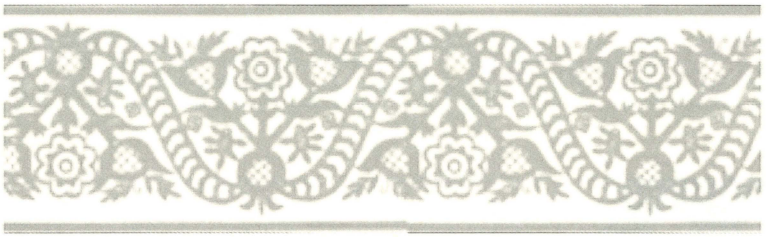
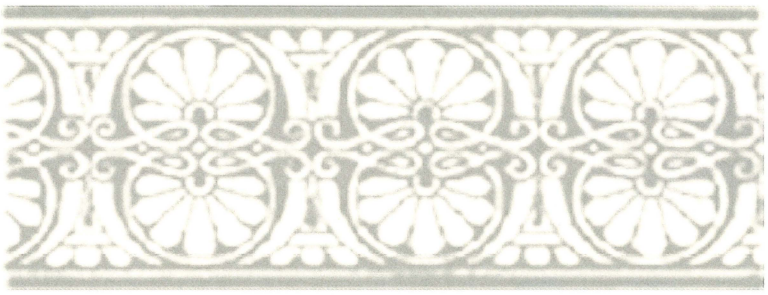
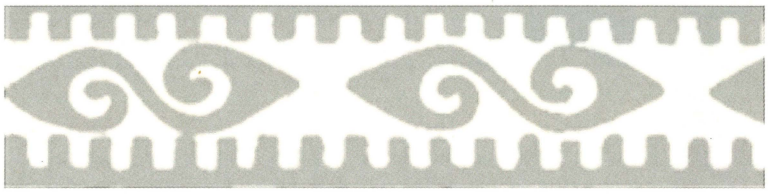
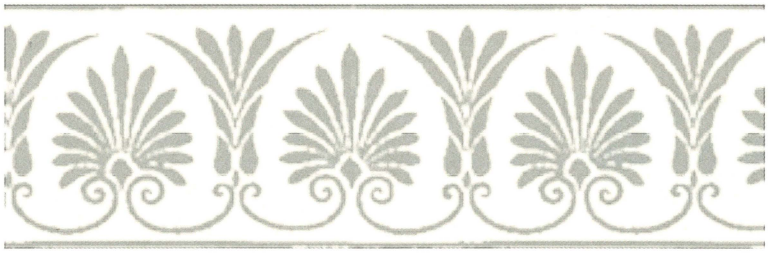
H 

I 

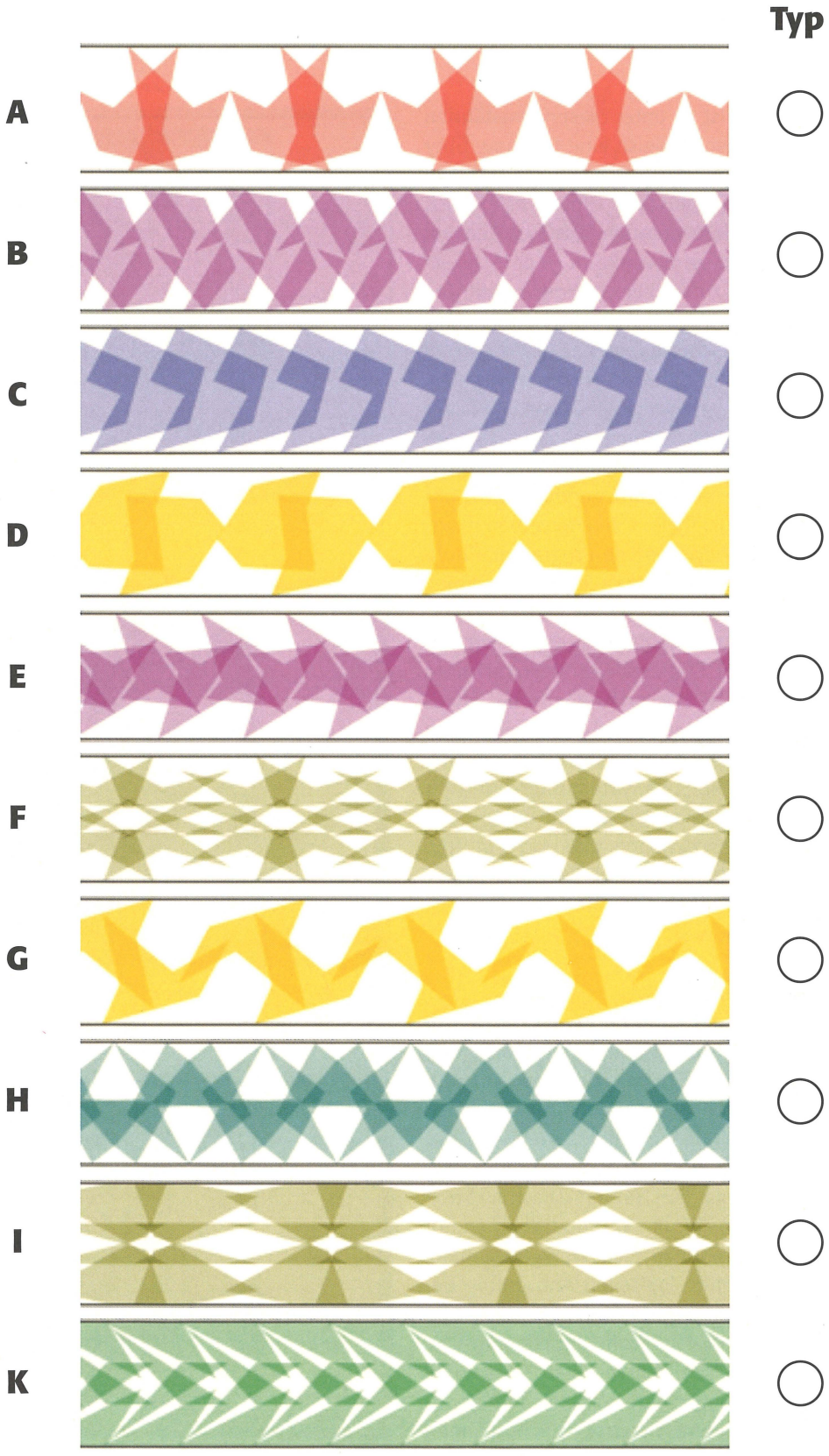
Arbeitsblatt «Die sieben Typen»

A5

- Markiere den rechteckigen Baustein, aus dem das Bandornament aufgebaut ist. Unterteile den Baustein, wenn die Hälfte genügt.
- Zeichne die Zentren von Punktspiegelungen und die Achsen von Achsenspiegelungen ein.
- Vergleiche mit dem Arbeitsblatt A1 und notiere rechts den Typ des Bandes.

		Typ
A		○
B		○
C		○
D		○
E		○
F		○
G		○

Arbeitsblatt «Computerbänder»

A6

– Markiere an einer günstigen Stelle den rechteckigen Baustein, aus dem das Bandornament aufgebaut ist. Unterteile den Baustein, wenn die Hälfte genügt.
– Zeichne die Zentren von Punktspiegelungen und die Achsen von Achsenspiegelungen ein.
– Vergleiche mit dem Arbeitsblatt A1 und notiere rechts den Typ des Bandes.