

## Alltägliches neu entdeckt

# Schweizer Münzen

Wir haben die Münzen fast täglich in den Händen und wissen doch so wenig darüber. Die Numismatik befasst sich mit alten und neuen Münzen. Wir beschränken uns hier auf die Schweizer Münzen, aber im Internet gibt es natürlich auch viele Arbeitsblätter über die Euro-Münzen, die ja in den verschiedenen Ländern nicht ganz gleich geprägt werden. **Walter Hofmann u.a.**



### Sind diese Behauptungen richtig oder falsch? Streiche die falschen Buchstaben durch.

- a) Ab 1883 wurde in der Schweiz eine Goldmünze geprägt, «die Helvetia».
- b) Die 20-Franken-Goldmünze «Vreneli» wurde von 1897 bis 1949 über 58,6 Millionen Mal geprägt.
- c) Bis etwa 1936 konnte man in vielen Geschäften mit diesem Goldvreneli bezahlen.
- d) Vreneli heisst die Münze, weil ein Teil des Glärnisch «Vrenelis Gärtlein» heisst.
- e) Die Sage «Vrenelisgärtli» ist auch im Internet abrufbar.
- f) 21 Künstler haben Entwürfe eingereicht, wie das 20-Franken-Vreneli aussehen sollte.
- g) Der Bundesrat fand das Vreneli zu jung und zu schwärmerisch. (Doofe alte Männer.)
- h) Die offenen Haare der jungen Frau durften nicht mehr offen dargestellt werden, sondern mussten in einen Zopf gebunden werden.
- i) Vreneli durfte auch keinen Lippenstift mehr verwenden.
- j) Zuerst hatte Vreneli noch eine lustige Stirnlocke, die gefiel einem Bundesrat aber nicht und musste bei der Prägung weggelassen werden.
- k) Heute ist das 20-Franken-Vreneli über Fr. 200.– wert. (Kontrolliere im Internet.)
- l) Heute kann ich bei grösseren Banken Goldvreneli kaufen oder verkaufen, z.B. als Geschenk.
- m) Der Goldpreis kann sich jeden Tag verändern, darum auch der Preis für Vrenelis.
- n) Einige Leute hätten lieber Wilhelm Tell oder die Männer vom Rütli auf der Goldmünze gesehen.
- o) Auch andere Länder haben Goldmünzen geprägt. Aber niemand zahlt mehr mit Gold.
- p) Die Schweiz hat noch für Hunderte Millionen Goldbarren zu 1 kg im Tresor.
- q) Früher hat man auch Löcher in den Zähnen mit Gold aufgefüllt.
- r) Auch in Schweizer Flüssen suchen Männer nach Gold, z. B. im Napfgebiet
- s) Gold kann auch aus Blei, Kupfer und Eisen hergestellt werden.

**Brauche deinen gesunden Menschenverstand, orientiere dich schnell im Internet oder lies den nachfolgenden Text zur Erweiterung deiner Allgemeinbildung.**

Falsch sind: (d), (i) und (s) (Vor dem Kopieren abdecken)

## Goldvreneli

Das **Goldvreneli** ist die bekannteste Goldmünze der Schweiz. Die 20-Franken-Münze wurde von 1897 bis 1949 geprägt. Die Gesamtauflage betrug 58,6 Millionen Exemplare. Den Namen Vreneli (Verkleinerungsform des traditionellen Schweizer Vornamens Verena) erhielt die Münze durch das von Fritz Landry gestaltete Frauenbild. Die Münze ist Nachfolgerin der von 1883 bis 1896 geprägten Goldmünze Helvetia. Von 1911 bis 1922 wurde auch ein 10-Franken-Vreneli geprägt. Die Auflage betrug 2,6 Millionen Stück. Goldvreneli sind in der Schweiz als Geschenke, als Halskettenanhänger und Wettbewerbspreise populär.

## Geschichte

1895 beschloss der Schweizer Bundesrat die Umgestaltung des 20-Franken-Stückes. Das eidgenössische Finanzdepartement legte fest, dass die Münze ein schweizerisches, nationales Motiv oder eine historisch-symbolische Darstellung der Schweiz tragen sollte. Im Mai 1895 begutachtete die Jury die 21 eingegangenen Entwürfe und empfahl, den zweiten Preis an den Neuenburger Künstler Fritz Landry zu vergeben. Seine Helvetiadarstellung wurde als zu jung, zu individuell und zu schwärmerisch empfunden. Auch wurde die Gebirgskulisse im Hintergrund als zu mächtig angesehen. Daraufhin überarbeitete Landry seinen Entwurf. Auf Anregung des eidgenössischen Finanzdepartements vergab der Bundesrat schliesslich den ersten Preis an Fritz Landry.

Im Herbst 1895 war das überarbeitete Modell fertig. Die junge Frau wirkte nun reifer, das Haar war nicht mehr offen, sondern zu einem Zopf gebunden. Um den Hals trug sie neu einen Kranz aus Edelweissblüten statt aus Rhododendronzweigen. Die Jury empfahl den Entwurf zur Ausführung. 1897 wurden zwölf Probeexemplare hergestellt und dem Bundesrat vorgelegt. Ein besorgter Magistrat bemängelte die Stirnlocke, die seiner Meinung nach *«dem Frauenzimmer ein frivoles Aussehen»* gebe. Daraufhin wurde die Stirnlocke bei den regulären Prägungen weggelassen. Von Fachleuten wurde die neue Goldmünze anfänglich stark kritisiert. Sie empfanden, wie auch schon die Jury im Gestaltungswettbewerb, das dargestellte Mädchen als zu jung, als zu unwürdig, um die Schweiz zu repräsentieren. Die *Schweizerische Numismatische Rundschau* schrieb hierzu: *«Besser wäre unser Land durch Wilhelm Tell oder durch die Mannen vom Rütli dargestellt worden.»* Im Gegensatz dazu war das Vreneli bei der breiten Bevölkerung von Anfang an sehr beliebt.

Ab 1931 begannen viele Staaten aufgrund der Weltwirtschaftskrise ihre Währungen abzuwerten. Am 27. September 1936 wurde auch der Schweizer Franken abgewertet, um ihn den veränderten internationalen Verhältnissen anzupassen. Ausserdem wurde die Schweizerische Nationalbank ihrer Verpflichtung, Banknoten in Gold umzutauschen, enthoben. Dadurch verloren die Goldmünzen, obwohl sie bis heute nicht ausser Kurs gesetzt wurden, ihren Kurswert, da der Goldwert des 20-Franken-Stückes auf ca. 28 Franken stieg. Die Goldmünzen wurden seitdem hauptsächlich gehortet.

## Beschreibung

Vorderseite: Frauenbüste nach links blickend, das reiche Haar in geflochtenem Zopf aufgebunden, das Kleid mit Edelweissen bestickt, vor einem Berghintergrund. Oben der Schriftzug «HELVETIA», am Rand unten rechts vertieft der Name des Künstlers «F. LANDRY», Perlkreis. Rückseite: Links der Nennwert 20 und rechts die Währungsangabe FR, dazwischen das Schweizer Wappen in ausgeschnittenem Schilde auf üppigem Eichenzweig. Über der Schildmitte, an einem Zweigende Bandknoten mit je zwei flatternden Enden auf jeder Seite, unten die Jahreszahl, rechts davon das Münzzeichen «B» für Bern. Perlkreis. Randprägung erhaben: 22 Sterne (für die Kantone, 7/7/8).



20-Franken-Vreneli.



Entwürfe von Landry.



Probeexemplar mit Stirnlocke.



Hast du unsere sieben *Schweizer Geldmünzen*, welche bestimmt schon häufig durch deine Hände gegangen sind, auch schon einmal genauer betrachtet? Dass einzig der Fünfer goldfarben glänzt (und dies seit 1981), dass auf den vier Münzen mit den höheren Werten *die Helvetia* (Frauengestalt als Symbol für die Schweiz) mit Speer und Schweizer Wappen dargestellt ist und dass auf dem Fünziger nicht etwa die Zahl 50 (wie beim Fünfer, Zehner und Zwanziger), sondern der betreffende Bruchteil des Frankens angegeben ist – dies alles ist dir gewiss bekannt. Ob du aber alle folgenden fünf Fragen beantworten kannst, nachdem du (als Hausaufgabe) die sieben Münzen ganz bewusst (und mit einer Lupe!) angeschaut hast?

1. Welches lateinische Wort kann vom Haarband des Frauenkopfes bei den kleinsten drei Werten abgelesen werden?

2. Welche zwei (ebenfalls lateinischen) Wörter umfassen beim Fünfliber den Kopf des Alphirten? (Das Bild stellt nicht etwa Wilhelm Tell dar, wie dies fälschlicherweise oftmals angenommen wird.)

3. Wie viele Sterne sind auf der Vorderseite des Fünfzigers, des Einfränklers und des Zweifränklers zu finden? \_\_\_\_\_



4. Welche (wiederum lateinischen) Wörter stehen auf dem Aussenrand des Fünflibers?

5. Welche Pflanzen ranken sich um den angegebenen Geldbetrag beim...

... Fünfer?

... Zehner?

... Zwanziger?

... Fünziger, Ein- und Zweifränkler?

... Fünfliber?

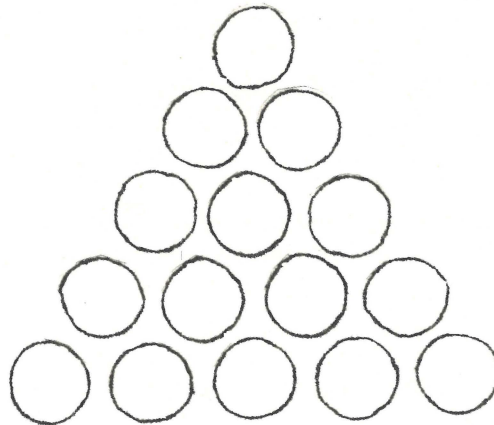
**Zum «krönenden Abschluss» kannst du versuchen, die folgenden beiden mit Geld zusammenhängenden Denksportaufgaben zu lösen...**

– Ein bestimmter Geldbetrag wird unter *fünf Personen* derart verteilt, dass zunächst die erste Person genau die Hälfte der Geldsumme plus einen Franken erhält. Vom Restbetrag bekommt die zweite Person wiederum genau die Hälfte und einen Franken dazu. Auf diese Weise wird weiter verfahren, bis am Schluss die ganze Geldsumme verteilt ist. Wie viel Bargeld war am Anfang vorhanden? \_\_\_\_\_

– Für die Klassen-Disco sollst du Pommes-Chips (1.20 Fr./Packung) einkaufen. Jeder Packung ist ein Coupon beigelegt – und immer drei Coupons kannst du jeweils gegen eine neue Packung eintauschen. Wie viele Packungen erhältst du insgesamt für 18 Franken? \_\_\_\_\_

Wie du deine grauen Zellen allein mit dem richtigen Verschieben von Münzen vortrefflich anregen kannst, sollen dir folgende drei Denkspielereien zeigen, zu deren «Bearbeitung» du fünfzehn Fünfer sammelst und die du – ausprobieren auf einem Notizblatt bis zum Finden der Lösung – in die Schule mitbringen sollst.

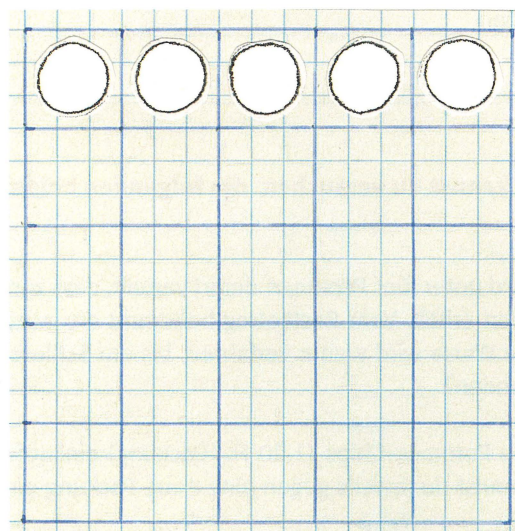
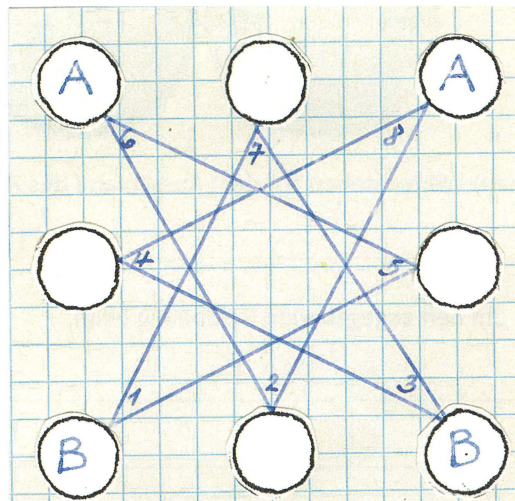
1. Diese aus lauter Fünfern bestehende Münzenpyramide mit der Spitze nach oben soll mit möglichst wenig Münzenverschiebungen derart verändert werden, dass nachher die Spitze nach unten zeigt. (Verschobene Münzen kreuzartig streichen, am neuen Ort wieder einzeichnen.)



2. Die beiden Fünfer bei A (mit dem Kopf nach oben) sollen mit den beiden Fünfern bei B (mit der Zahl nach oben) gegeneinander ausgetauscht werden. Dies ist möglich mit 16 Verschiebungen (entlang der Linien), die du hier angeben sollst:

- |          |          |           |           |
|----------|----------|-----------|-----------|
| 1) 6-5   | 5) _____ | 9) _____  | 13) _____ |
| 2) 8-2   | 6) _____ | 10) _____ | 14) _____ |
| 3) _____ | 7) _____ | 11) _____ | 15) _____ |
| 4) _____ | 8) _____ | 12) _____ | 16) _____ |

(Die ersten zwei Verschiebungen sind bereits richtig eingetragen)






3. Die fünf Fünfer der obersten Reihe sollen derart verschoben werden, dass danach in jeder waagrechten und jeder senkrechten Linie je eine, in jeder schrägen Linie höchstens eine Münze liegt. (Münzen nach richtiger Verschiebung farbig einzeichnen.)



# Geld wechseln, bitte!

1. Notiere unten auf jeder Linie eine andere Möglichkeit, wie der links angegebene Betrag umgewechselt werden könnte. (Siehe die Beispiele bei zehn und bei fünfzehn Rappen.) Notiere jeweils auch die gesamte Anzahl der Wechselmöglichkeiten (WM) bei jedem Betrag!

2. Beschaffe dir jetzt ein Notizblatt und bestimme auf gleiche Art die Anzahl der WM für 45, 50, 55, 60 und 65 Rappen!

Betrag				WM
10 Rp.	0	1	0	2
15 Rp.	0	1	1	2
20 Rp.				
25 Rp.				
30 Rp.				
35 Rp.				
40 Rp.				

45 Rappen: \_\_\_\_\_

50 Rappen: \_\_\_\_\_

55 Rappen: \_\_\_\_\_

60 Rappen: \_\_\_\_\_

65 Rappen: \_\_\_\_\_

Jetzt kennst du alle WM von 10 bis 65 Rp. Notiere aber alle diese Werte nochmals, denn *durch das Vergleichen der Zahlen* kannst du die mathematische Regel herausfinden, mit der du die WM von 70 bis 95 Rp. auch ohne Tabellenform bestimmen kannst.

(Rechte Kolonne)

10 Rp. : \_\_\_\_\_ 70 Rp. : \_\_\_\_\_

15 Rp. : \_\_\_\_\_ 75 Rp. : \_\_\_\_\_

20 Rp. : \_\_\_\_\_ 80 Rp. : \_\_\_\_\_

25 Rp. : \_\_\_\_\_ 85 Rp. : \_\_\_\_\_

30 Rp. : \_\_\_\_\_ 90 Rp. : \_\_\_\_\_

35 Rp. : \_\_\_\_\_ 95 Rp. : \_\_\_\_\_

40 Rp. : \_\_\_\_\_

45 Rp. : \_\_\_\_\_

50 Rp. : \_\_\_\_\_

55 Rp. : \_\_\_\_\_

60 Rp. : \_\_\_\_\_

65 Rp. : \_\_\_\_\_

Um die unten beschriebenen Umlegeaufgaben lösen zu können, solltest du einen Zweifränkler, einen Fränkler, einen Zwanziger, einen Zehner und einen Fünfer zur Hand haben. Lege zuerst den Zweifränkler auf ein Notizblatt und zeichne durch «Nachfahren» nebeneinander drei Kreise. Errichte dann auf dem linken Kreis mit dem Zweifränkler, dem Fränkler und dem Zwanziger einen kleinen Münzenturm, bei dem die Münzen von unten nach oben immer kleiner werden. Schaffst du es, dieses Türmchen unter Beachtung folgender drei Regeln mit möglichst wenig Zügen vom linken auf den rechten Kreis umzuschichten?

1. Du darfst immer nur eine einzige Münze umplatzieren.
2. Du darfst immer nur eine kleinere auf eine grössere Münze legen.
3. Du darfst auch den mittleren Kreis als «Zwischenlagerung» benützen.

**Wie viele Spielzüge hast du für die drei Münzen gebraucht?** \_\_\_\_\_

Nachdem du diese Umschichtungen wahrscheinlich problemlos bewältigt hast, kannst du versuchen, in gleicherweise vier Münzen (!) umzulegen (einfach noch den Zehner dazunehmen). Für die Wiedergabe deiner Lösung (es sind diesmal insgesamt 15 Spielzüge!) legen wir folgende Abkürzungen fest:

L, M und R = linker, mittlerer und rechter Kreis  
 2 und 1 = Zwei- und Einfränkler / 20, 10 und 5 = Zwanziger, Zehner und Fünfer

- |                |                |                |                 |                 |
|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|
| 1. ___ auf ___ | 4. ___ auf ___ | 7. ___ auf ___ | 10. ___ auf ___ | 13. ___ auf ___ |
| 2. ___ auf ___ | 5. ___ auf ___ | 8. ___ auf ___ | 11. ___ auf ___ | 14. ___ auf ___ |
| 3. ___ auf ___ | 6. ___ auf ___ | 9. ___ auf ___ | 12. ___ auf ___ | 15. ___ auf ___ |

Ein Ziel dieses Arbeitsblattes ist es natürlich, den *mathematischen Zusammenhang* zwischen der *Anzahl der Münzen* und der Anzahl der Umschichtungen herauszufinden. Versuche deshalb, diese Umschichterei zusammen mit einem Partner oder einer Partnerin auch mit fünf Münzen und bewusstem Vorgehen zu bewerkstelligen! (Zusätzlich den Fünfer verwenden.)

**Schafft ihr es gar, eure Erkenntnisse abschliessend in folgender Tabelle zusammenzufassen und die auffallend regelmässige Zahlenverteilung mathematisch zu deuten?**

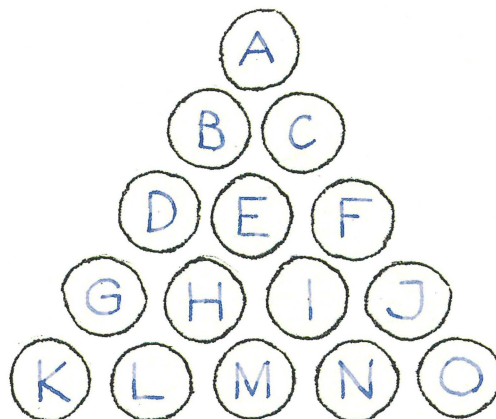
Anzahl der Münzen      Anzahl Umplatzierungen jeder Münze:  
 (1 = kleinste Münze 2 = zweitkleinste Münze usw.)      Gesamte Anzahl der Umplatzierungen

	1	2	3	4	5	
Eine						
Zwei						
Drei						
Vier						
Fünf						



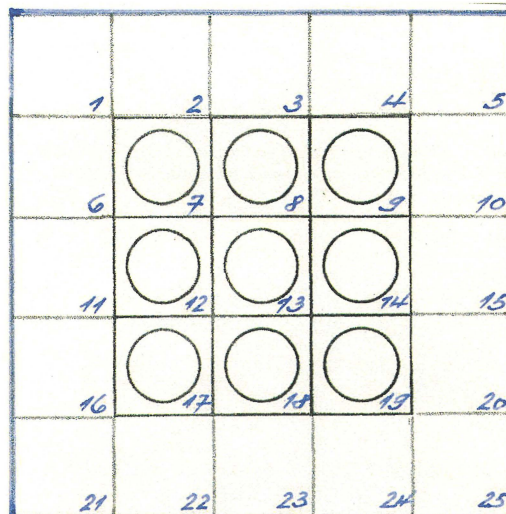
Wie das zielgerichtete Überspringen von Münzen eine ausgezeichnete Gelegenheit ist, um Denkaufgaben *mit geschicktem Vorgehen* zu lösen, zeigen dir die untenstehenden drei Knobeleyen. Du brauchst dafür *ein Notizblatt* (zum vereinfachten und vergrößerten Abzeichnen der Spielpläne und Notieren der Sprünge) sowie *fünfzehn Fünfer*, die du vorher sammelst und in die Schule mitbringen sollst.

**1.** Lege zuerst mit den 15 Fünfern die abgebildete Pyramide. Mit dem richtigen Überspringen kann sie *bis auf eine einzige Münze* abgebaut werden. Entferne also eine beliebige Münze, damit ein Überhüpfen auf den vorgegebenen 15 Feldern überhaupt möglich wird. Jede übersprungene Münze wird immer sofort aus der Pyramide genommen! Wir schieben beispielsweise die Münze A aus der Spitze weg. Der Eröffnungszug lautet dann: F nach A / und C wegnehmen. Findest du die weiteren Sprünge, die zum Ziel führen? (Der erste Spielzug ist bereits vorgegeben.)



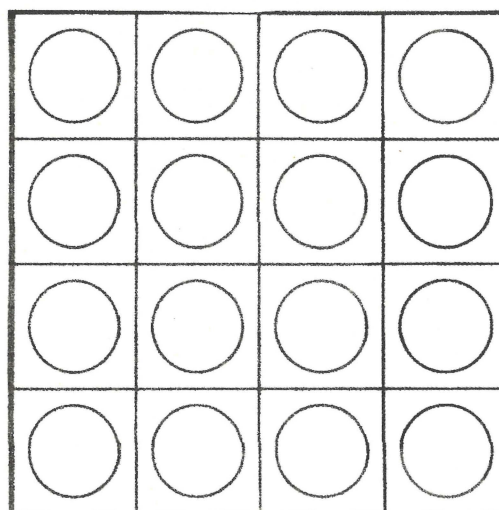
1. DF / E    2. \_\_\_\_\_    3. \_\_\_\_\_    4. \_\_\_\_\_
5. \_\_\_\_\_    6. \_\_\_\_\_    7. \_\_\_\_\_    8. \_\_\_\_\_
9. \_\_\_\_\_    10. \_\_\_\_\_    11. \_\_\_\_\_    12. \_\_\_\_\_

**2.** Diesmal legst du erst neun Fünfer in die mittleren Felder eines 5 × 5-Quadrates. Wiederum sollen diese Münzen *bis auf eine Münze weggespielt* werden. Erlaubt dabei sind Sprünge in allen drei Richtungen (waagrecht, senkrecht, schräg) auf alle nummerierten Felder. Als besondere Vorgabe soll die letzte Münze auf das mittlere Feld (13) zu liegen kommen! Es ist dir freigestellt, mit welchem Fünfer du den «Hüpfreigen» eröffnen willst... Wir beginnen beispielsweise mit dem Sprung 12–24 / und 18 wegnehmen. Suche ebenfalls die weiteren sieben Sprünge!



1. \_\_\_\_\_    2. \_\_\_\_\_    3. \_\_\_\_\_    4. \_\_\_\_\_
5. \_\_\_\_\_    6. \_\_\_\_\_    7. \_\_\_\_\_

**3.** Zum Abschluss darfst du mit einem(r) Partner(in) das reizvolle «Dreimünzenspringen» (auf dem abgebildeten Spielfeld) austragen. Zuerst wird ausgelost, wer mit Kopf und wer mit Zahl spielen und wer mit dem Setzen beginnen darf. Abwechslungsweise wird nun Münze für Münze auf einem beliebigen Kreis abgelegt – immer mit dem Ziel, drei Fünfer in einer Reihe (waagrecht, senkrecht oder diagonal) platzieren zu können. Sind die drei Münzen gelegt, darf – ähnlich dem «Nüünimal» – auf ein beliebiges Feld gesprungen werden. Sieger ist, wem es zuerst gelingt, eine Dreierreihe zu bilden!



# Lösungen

## Antworten A1

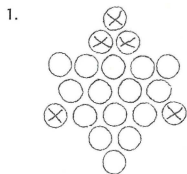
Sollen in der Schule alle fünf Fragen richtig beantwortet werden können, müssen die Schüler(innen) als Hausaufgabe vorgängig alle sieben Münzen genau angeschaut haben! Wichtig dabei sind die Aufforderungen der Lehrperson, lateinische Inschriften Buchstabe für Buchstabe zu notieren (vielleicht gar deren Bedeutung herauszufinden), die fünfzackigen Sterne zu zählen und deren Anzahl zusammen mit dem Jahrgang der Münze aufzuschreiben sowie die verschiedenen Pflanzenarten buchstäblich «unter die Lupe zu nehmen!» Sinnvoll ist es auch, wenn die Kinder am Tag der Besprechung die fünf kleineren Münzen sowie eine Lupe in die Schule mitbringen. (Die den Fünfliber betreffenden Antworten können – ausser Frage drei – anhand einer HP-Folie veranschaulicht werden.)

- Die LIBERTAS ist die bildliche Darstellung der Freiheit. Abbildungen ihres Kopfes finden sich auf dem Fünfer, Zehner und Zwanziger
- CONFEDERATIO HELVETICA (Abkürzung CH) ist der lateinische Name für die Schweizerische Eidgenossenschaft.
- DOMINUS PROVIDEBIT bedeutet «Der Herr wird vorsorgen» (Genesis 22, 8)
- Der Sternenkranz steht für alle (Ganz-)Kantone der Schweiz. Bis zum Jahrgang 1982 waren 22 Sterne zu erkennen (links und rechts der Helvetia je 11), ab 1983 wurde (wegen der Gründung des Kantons Jura) auf der rechten Seite ein Stern hinzugefügt. (Im Ganzen seither also 23 Sterne.)
- Fünfer: Rebenlaub (mit 6 Trauben). Zehner: Eichenlaub (mit 10 Eicheln). Zwanziger: Alpenrosen; Fünziger, Ein- und Zweifränkler: Eichenlaub mit Eicheln (links) und Alpenrosen mit Blüten (rechts), Fünfliber: Edelweiss mit vier Blüten (links) und Alpenrosen (rechts).

### Zwei Denksportaufgaben:

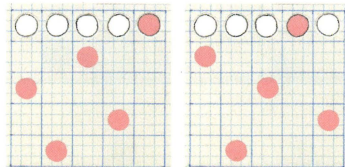
- Damit das Geld vollständig verteilt werden kann, müssen für die fünfte Person zwei Franken übrig bleiben, denn die Hälfte davon plus ein Franken ergeben genau diese letzten noch zu verteilenden zwei Franken. Dass aber zwei Franken nach der vierten Verteilung übrig bleiben, ist nur dann möglich, wenn vorher sechs Franken zur Verfügung gestanden sind! So «hangeln» wir uns von Verteilung zu Verteilung rückwärts, bis wir beim Anfangsbetrag von 62 Franken anlangen...
- Zuerst kaufst du mit den 18 Franken 15 Packungen Pommes-Chips. Mit den 15 Coupons erhältst du 5 zusätzliche Packungen. Drei davon tauschst du gegen eine weitere Packung ein. Mit dem Coupon dieser Packung und den beiden vorher übrig gebliebenen Coupons bekommst nochmals eine Packung. Insgesamt gelangst du damit also zu  $(15 + 5 + 1 + 1) = 22$  Packungen!

## Lösungen A2



- 2.
- |        |        |         |         |
|--------|--------|---------|---------|
| 1) 6-5 | 5) 4-8 | 9) 3-4  | 13) 7-3 |
| 2) 8-2 | 6) 8-2 | 10) 4-8 | 14) 6-5 |
| 3) 2-6 | 7) 1-7 | 11) 5-1 | 15) 5-1 |
| 4) 3-4 | 8) 7-3 | 12) 1-7 | 16) 2-6 |

### 3. Zwei mögliche Lösungen:



### Didaktische Anregung unter dem Motto: «Aller guten Dinge sind drei»!

Die meisten Schüler(innen) kennen wohl das Spiel «Tic-Tac-Toe», dessen Spielfeld aus neun Quadratzellen besteht, in welche die Spielpartner(innen) abwechselnd einen Kreis oder ein Kreuz schreiben. Wer mit seinen Zeichen zuerst eine Dreierreihe (senkrecht, waagrecht oder schräg) bilden kann, hat das Spiel gewonnen. Mit zwei kleinen Änderungen wird aus «Tic-Tac-Toe» das spannendere Strategiespiel «Tac-Tickle»: Einerseits wird statt auf neun auf sechzehn Feldern gespielt, andererseits werden jetzt nicht Kreise und Kreuze gezeichnet, sondern je vier Fünfer in waagrecht oder senkrechter Richtung abwechselnd um ein Feld verschoben. Gewinner(in) wird wiederum (gemäss unserem Motto), wer zuerst drei Münzen in vertikaler, horizontaler oder diagonalen Linie platzieren kann. Vor Spielbeginn wird mit einem Fünfer in geschlossener Hand ausgelost, wer mit Kopf oder Zahl spielen, und auch, wer mit dem Eröffnungszug das erste Spiel beginnen darf. Links die Ausgangsstellung.

## Antworten A3

Dass Geldmünzen nicht allein als Zahlungsmittel, sondern auch als Anreiz für spielerisches mathematisches Denken dienen können, zeigt das vorgeschlagene Arbeitsblatt! Und dies sind die WM (Wechselmöglichkeiten) für...

- |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| ... 10 und 15 Rp.: je 2  | ... 20 und 25 Rp.: je 4  | ... 30 und 35 Rp.: je 6  |
| ... 40 und 45 Rp.: je 9  | ... 50 und 55 Rp.: je 12 | ... 60 und 65 Rp.: je 16 |
| ... 70 und 75 Rp.: je 20 | ... 80 und 85 Rp.: je 25 | ... 90 und 95 Rp.: je 30 |

## Erkenntnisse:

- Die beiden Geldbeträge mit der gleichen Zehnerzahl haben immer gleich viele WM! Warum das so ist? Weil bei dem um 5 Rp. grösseren Betrag bei jeder WM (d. h. auf jeder entsprechenden Linie) jeweils ein Fünfer hinzukommt!
- Zur Bestimmung der WM von 70 bis 95 Rp. hilft uns diese Übersicht:

Zehnerzahl:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Anzahl WM:	2	4	6	9	12	16	20	25	30
mathemati-	→	→	→	→	→	→	→	→	→
sehe Regel:	+2	+2	+3	+3	+4		+4	+5	+5
	(mit AB herausgefunden)						(hergeleitet)		

- Überprüfen wir anschliessend, ob man 95 Rappen tatsächlich auf 30 verschiedene Arten wechseln kann!

Nach dem gemeinsamen Erarbeiten der vollständigen Tabelle mit allen WM für 95 Rappen zählen wir tatsächlich 20 WM bei Verwendung von vier, drei, zwei oder einem Zwanziger, 9 WM unter Einbezug von 9, 8, 7... Zehnern und eine einzige WM mit 19 Fünfern! (Bestätigung unserer Vermutung:  $20 + 9 + 1 = 30$ )

### Ausgefüllte Tabelle mit der mathematischen Interpretation

Anzahl der Münzen      Anzahl Umplatzierungen jeder Münze: (1 = kleinste Münze / 2 = zweitkleinste Münze usw.)      Gedamte Anzahl der Umplatzierungen:

	1	2	3	4	5	
Eine	1					1
Zwei	2	1				3
Drei	4	2	1			7
Vier	8	4	2	1		15
Fünf	16	8	4	2	1	31

Die Anzahl Versetzungen bei *einer Münze* muss nicht erklärt werden, wird sie doch ganz einfach von L auf R geschoben (1 Spielzug).

Besteht das kleine Türmchen aus *zwei Münzen*, erkennen wir gleich, dass die obere Münze erst auf M gelegt werden muss, dann die untere (grössere) auf R und schliesslich die kleinere Münze von M auf R (3 Spielzüge).

Bei *drei Münzen* – unserer ersten Aufgabe – müssen zuerst die beiden oberen Münzen auf dem mittleren Kreis «parkiert» werden, bevor die grösste Münze auf R geschoben werden kann. Dies erfordert (gemäss unserer Erkenntnis bei zwei Münzen) 3 Spielzüge – allerdings mit dem ersten Zug auf R (statt auf M, wie bei zwei Münzen). Nachdem wir die grösste Münze auf R geschoben haben (1 Spielzug), können wir die beiden kleineren Münzen wiederum auf die grösste Münze umschichten (3 Spielzüge). → *Insgesamt also  $3 + 1 + 3 = 7$  Spielzüge.*

Sind es gar *vier Münzen* (unsere zweite Aufgabe), müssen wiederum erst die drei oberen Münzen auf M gebracht werden (7 Spielzüge analog der Umschichtungen mit drei Münzen), darauf die grösste Münze auf R (1 Spielzug) und schliesslich wiederum die drei kleineren Münzen von M auf R (7 Spielzüge). → *Insgesamt also  $7 + 1 + 7 = 15$  Spielzüge.*

Das sind diese 15 Spielzüge:

- |              |             |              |               |               |
|--------------|-------------|--------------|---------------|---------------|
| 1. 10 auf M  | 4. 1 auf M  | 7. 10 auf 20 | 10. 20 auf L  | 13. 10 auf M  |
| 2. 20 auf R  | 5. 10 auf 2 | 8. 2 auf R   | 11. 10 auf 20 | 14. 20 auf 1  |
| 3. 10 auf 20 | 6. 20 auf 1 | 9. 10 auf 2  | 12. 1 auf 2   | 15. 10 auf 20 |

Aus den mathematischen Erkenntnissen mit vier Münzen folgern wir, dass beim aus *fünf Münzen* bestehenden Turm für das Umplatzieren insgesamt 31 Spielzüge nötig sein werden. (15 für die oberen vier auf M + 1 für die grösste Münze auf R + 15 für die oberen vier von M auf R)

### Allgemein gilt:

Die gesamte Zahl der Umplatzierungen beträgt:  $2^n - 1$  ( $n$  = Anzahl der Münzen)

### Erkenntnisse:

Die *grösste Münze* wird bei *allen Umschichtungen genau einmal verschoben* – nämlich jedesmal beim mittleren Zug, und auch jedesmal von L auf R. (Dies verdeutlichen die Einsen der Tabelle und der achte Spielzug unserer Zusammenstellung.)

Die *zweitgrösste Münze* wird immer genau *zweimal umplatziert* – nämlich jedesmal bei einem Viertel und drei Vierteln aller Spielzüge (siehe die Zweien der Tabelle sowie die Spielzüge vier und zwölf unserer Zusammenstellung).

### Allgemein gilt:

Jede Münze wird *genau doppelt so viele Male wie ihre nächstgrössere Münze* umgeschichtet! (Dass bei unserem Beispiel mit vier Münzen 20 also viermal und 10 achtmal versetzt werden, kann ebenfalls in unserer Zusammenstellung leicht nachgeprüft und -gezählt werden.)



Klären wir schliesslich noch die Frage, ob die kleinste Münze beim ersten Spielzug vom Türmchen zuerst auf M oder R gelegt werden muss! Rückblickend erinnern wir uns: Bei 1 Münze schoben wir die Münze direkt auf R, bei 2 Münzen parkierten wir sie zuerst auf M, bei drei Münzen (unsere erste Aufgabe) wiederum zuerst auf R, bei 4 Münzen (siehe Zusammenstellung) auf M, bei 5 Münzen (Partnerarbeit) erneut auf R.

Somit stellen wir fest, dass bei jeder Erhöhung der Münzenzahl um eine Münze der erste Spielzug jeweils vertauscht wird. Merken sich die Schüler(innen) nur den allereinfachsten Fall – Versetzung der einzigen Münze von L auf R –, wissen sie auch, dass beim ersten Zug folgendermassen begonnen werden muss: R, M, R, M, R usw.

**Allgemein gilt:**

Bei ungerader Münzenzahl wird die kleinste Münze immer zuerst auf R, bei gerader Münzenzahl immer zuerst auf M gelegt.

**Anmerkung:**

Dieses stückweise Umschichten eines Turmes von Münzen (es könnten auch Platten oder Scheiben sein) ist ein uraltes Geduldsspiel und weist durch seinen Namen «Turm von Hanoi» auf eine mögliche Herkunft aus dem fernen Osten hin.

**Lösungen A5**

Die beiden ersten Aufgaben mit dem planmässigen Überspringen von Münzen sind eigentlich nur vereinfachte Formen des bekannten Solitär- oder Einsiedlerspiels. Sie eignen sich deshalb ausgezeichnet als Einführung zu diesem Hüpfspiel mit den 33 Feldern, zu dem es viele Umschreibungen (und unzählige Lösungen!) gibt...

**Pyramide**

- |         |         |          |
|---------|---------|----------|
| 1. DF/E | 5. JC/F | 9. BG/D  |
| 2. NE/I | 6. OM/N | 10. CH/E |
| 3. AD/B | 7. GB/D | 11. KD/G |
| 4. LN/M | 8. MD/H | 12. DM/H |

(die letzte Münze verbleibt im mittleren Feld der untersten Reihe)

Hier noch ein Lösungsbeispiel, bei dem die übrig bleibende Münze mit dem letzten Sprung auf dem Platz der ersten weggenommenen Münze landet: Wir nehmen diesmal die Münze D weg und eröffnen mit FD/E.

- |         |         |          |
|---------|---------|----------|
| 1. NE/I | 5. CJ/F | 9. OF/J  |
| 2. OF/J | 6. AD/B | 10. FD/E |
| 3. LN/M | 7. GB/D | 11. BG/D |
| 4. DM/H | 8. MO/N | 12. KD/G |

Bei einem dritten Lösungsbeispiel nehmen wir zuerst die «mittlere» Münze E weg und beginnen mit LE/H. Die weiteren Züge lauten dann:

- |         |         |          |
|---------|---------|----------|
| 1. JH/I | 5. GB/D | 9. NL/M  |
| 2. BI/E | 6. AD/B | 10. FM/I |
| 3. CJ/F | 7. NL/M | 11. NL/M |
| 4. OF/J | 8. DM/H | 12. KM/L |

**9 Münzen und 25 Quadrate**

- |            |             |             |             |
|------------|-------------|-------------|-------------|
| 1. 13-3/8  | 2. 3-11/7   | 3. 11-23/17 | 4. 23-15/19 |
| 5. 9-19/14 | 6. 24-14/19 | 7. 15-13/14 |             |

Ein anderes Lösungsbeispiel mit einer (senkrechten) Eröffnung: 13-23/18

- |             |           |             |            |
|-------------|-----------|-------------|------------|
| 1. 23-15/19 | 2. 15-3/9 | 3. 3-11/7   | 4. 17-7/12 |
| 5. 14-2/8   | 6. 2-12/7 | 7. 11-13/12 |            |

(In Feld 13 kommt – gemäss Vorgabe – beide Male die letzte Münze zu liegen)

**Didaktischer Hinweis zum «Dreimünzenspringen»**

Wenn sechzehn Stühle in einem grossen Zimmer (oder im Singsaal) in quadratischer Anordnung aufgestellt werden können, kann das Partnerspiel in gleicher Art als lustvolles und vernünftliches Spiel zwischen drei aus bestimmten Gruppen ausgewählten Schülern ausgetragen werden (Fünftklässler, Sechstklässler, Knaben, Mädchen, Ausländer, Schweizer, Geburtstage verschiedener Jahre, Blonde, Dunkelhaarige, grosse, freie Gruppenbildung mit Spielbündeln usw.). Äusserst wichtig dabei ist aber, dass «die Nichtspieler das Maul halten!»

