

## Menschenkette und -fläche - Problemlöse-Aufgabe

Diese Aufgabe wurde abgeändert und stammt ursprünglich aus dem Lehrmittel Mathbuch 1 Schulbuch S. 49, Nr. 6.

Mit dieser Problemlöseaufgabe soll den Lernenden gemäss den Kriterien Offenheit, Authentizität und Differenzierungsvermögen von Holzäpfel et al. (2018) die Möglichkeit geboten werden, kompetenzorientiert Mathematikunterricht zu betreiben.

### Aufgabenstellung:

#### Menschenkette/Menschenfläche:

1a) Wie lange wird eine Kette, wenn deine ganze Klasse sich die Hände reicht?

1b) Wie lange, wenn es die ganze Schule ist?

1c) Wie lange, wenn es die ganze Weltbevölkerung ist? Und wie oft würde diese um den Äquator reichen?

2a) Wie viel Fläche braucht eine Person zum Stehen? Tipp man braucht nicht nur Platz für die Füsse.

2b) Wie viel Fläche benötigt deine Klasse, wenn sie ganz nahe beieinanderstehen?

2c) Wie viel, wenn es die ganze Schule ist?

2d) Wie viel, wenn es die ganze Weltbevölkerung ist? Mache einen Vergleich zu einer bekannten Fläche.



**Begründung** der «guten» Problemlöseaufgabe mit den Kriterien von Holzäpfel et al. (2018) (Differenzierungsvermögen, Offenheit, Authentizität)

Nach Holzäpfel et al. (2018), ist die Aufgabe dem Aufgabentyp des Problems mit unklaren Voraussetzungen zuzuschreiben. Dies kann damit begründet werden, dass es sich um einen unklaren Startwert handelt. Der Weg ist wohl bei der Teilaufgabe a) klar, kann aber in den folgenden Teilaufgaben variieren. Bei der Aufgabe handelt es sich somit um eine Anwendungsaufgabe der Umfang- und Flächenberechnung.

Weiter ist die Aufgabe nach Holzäpfel et al. (2018) stufendifferenziert. Dies aufgrund dessen, dass die Aufgabe mit der Teilaufgabe 1a) relativ einfach anfängt und allenfalls sogar enaktiv durchgeführt werden kann. Mindestens ab der Teilaufgabe 1b) müssen Annahmen (Armspannweite, Anzahl Personen) getroffen werden, zudem werden die Zahlen zunehmend grösser, was insgesamt zu einer Erhöhung der Schwierigkeit führt. Die Teilaufgaben der Nr. 2 sind gleich aufgebaut, starten einfach und werden zunehmend schwieriger. Da die benötigte Fläche einer Person jedoch nicht klar definiert ist, bietet die Aufgabe 2 viel Spielraum für Überlegungen zu den Ausgangswerten und ist daher in den Grundzügen schwieriger.

Des Weiteren handelt es sich nach Holzäpfel et al. (2018) um eine authentische Aufgabe, weil die Problemstellung inner- sowie aussermathematisch eine gewisse Bedeutung hat. Begründen lässt sich dies dadurch, dass die Aufgabe einen wirklichen Problemcharakter hat. Die Lernenden müssen aktiv die Barriere der Ausgangswerte überwinden, welche einen realen Bezug zu den Lernenden aufweist, indem sie Gedanken zu den abhängigen Grössen wie der Armspannweite oder benötigte Flächen machen müssen.

**Lösungsansätze** auf mind. 3 Niveaus mit Kennzeichnung der Heuristiken sauber digitalisiert

Niveau C: «Meine Arme sind wie alle Arme». Es wird angenommen, dass die eigene Armlänge bzw. das eigene Platzbedürfnisse für alle Menschen der Welt gilt und nur diese wird benutzt zum Rechnen.

In diesem Beispiel kann die Heuristik der Repräsentativität angewendet werden. Die SuS gehen davon aus, dass ihre eigene Armlänge und ihr Platzbedarf repräsentativ für alle Menschen auf der Welt gelten. Diese Heuristik beruht auf der Idee, dass ein Objekt oder Ereignis aufgrund seiner Ähnlichkeit mit anderen Objekten oder Ereignissen kategorisiert wird. Dies führt automatisch zu einem ungenauen Wert, da dieser nicht auf die Allgemeinheit übertragen werden kann. Daher ist es wichtig, kritisch zu denken und andere Quellen von Informationen und Daten zu berücksichtigen, um eine genaue Einschätzung zu erhalten.

Lösung Niveau C:

Eigene Armlänge = 150 cm Armlänge aller Menschen = 150 cm	Eigener Platzbedarf = $0.5\text{m}^2$ Platzbedarf jedes Menschen = $0.5\text{m}^2$
1a). 20 SuS: $150\text{cm} \cdot 20 = 3000\text{cm} = \underline{30\text{m}}$	2a). 20 SuS: $0.5\text{m}^2 \cdot 20 = \underline{10\text{m}^2}$
1b). 400 SuS: $150\text{cm} \cdot 400 = 60'000\text{cm} = \underline{600\text{m}}$	2b). 400 SuS: $0.5\text{m}^2 \cdot 400 = \underline{200\text{m}^2}$
1c). 8 Milliarden: $150\text{cm} \cdot 8'000'000'000 = 1'200'000'000'000\text{cm} = 12'000'000'000\text{m} = 12'000'000\text{km}$  1x um die Erde = <u><math>40'000\text{km}</math></u>  $12'000'000 / 40'000 = \underline{300}$  Es reicht 300-Mal um die Erde	2c). 8 Milliarden: $0.5\text{m}^2 \cdot 8'000'000'000 = 4'000'000'000\text{m}^2$  $4'000'000'000\text{m}^2 = \underline{4'000\text{km}^2}$

Niveau B: «Nicht alle Arme sind gleich lang, es braucht einen Durchschnittswert». Dieser Durchschnittswert wird dann für die Berechnungen verwendet, dass gleiche gilt auch für die Platzbedürfnisse.

Für das Niveau B wird die Heuristik der Normierung oder Standardisierung angewendet. Sie basiert auf der Idee, dass Menschen dazu neigen, Daten zu normieren oder zu standardisieren, indem sie sie auf einen gemeinsamen Nenner bringen oder einen Durchschnittswert verwenden. In diesem Fall wird angenommen, dass es eine durchschnittliche Armlänge und ein durchschnittliches Platzbedürfnis gibt, die für die meisten Menschen repräsentativ sind. Die Anwendung dieser Heuristik kann dazu beitragen, die Varianz und die Unterschiede zwischen individuellen Werten zu minimieren und es ermöglichen, allgemeine Schlussfolgerungen auf der Grundlage der Daten zu ziehen.

Lösung Niveau B:

Durchschnittswert für alle Personen = 170cm	Durchschnittswert für alle Personen = $1\text{m}^2$
1a). $20 \text{ SuS} \cdot 170 \text{ cm} = 3400 \text{ cm} = 34 \text{ m}$	2a). $20 \text{ SuS} \cdot 1\text{m}^2 = 20\text{m}^2$
1b). $400 \text{ SuS} \cdot 170 \text{ cm} = 68000 \text{ cm} = 680 \text{ m}$	2b). $400 \text{ SuS} \cdot 1\text{m}^2 = 400\text{m}^2$
1c). $8'000'000'000 \text{ P.} \cdot 170 \text{ cm} = 1'360'000'000'000 \text{ cm} = \underline{13'600'000 \text{ km}}$  $13'600'000 \text{ km} / 40'000 \text{ km} = \underline{340\text{-Mal}}$	2c). $8'000'000'000 \cdot 1\text{m}^2 = 8'000'000'000 \text{ m}^2$  $8'000'000'000\text{m}^2 = \underline{8'000 \text{ km}^2}$

Niveau A: «Nicht alle Arme sind gleich lang, es braucht mehrere Durchschnittswerte für z.B. Männer, Frauen, Kinder etc.». Diese Durchschnittswerte werden prozentual benutzt, um die Lösungen der Teilaufgaben zu erhalten.

Für das Niveau A wird die Heuristik der Segmentation oder der Unterteilung angewendet. Diese Heuristik basiert auf der Idee, dass komplexe Probleme in kleinere, überschaubare Teilaufgaben unterteilt werden können, die leichter zu lösen sind. In diesem Fall werden die Armlänge und das Platzbedürfnis je nach Geschlecht und Alter segmentiert und verschiedene Durchschnittswerte für Männer, Frauen, Kinder usw. berechnet. Die Anwendung dieser Heuristik kann dazu beitragen, komplexe Probleme in überschaubare Teilaufgaben zu unterteilen und so die Lösung des Gesamtproblems zu erleichtern. Die Verwendung von prozentualen Durchschnittswerten kann es auch ermöglichen, die Unterschiede zwischen den einzelnen Segmenten zu berücksichtigen und so zu einer genaueren Lösung beizutragen.

**Fachlicher Gehalt der Aufgabe:** Welche Begriffe werden vorausgesetzt? Welche Begriffsbildungsprozesse können mit der Aufgabe angestoßen werden? Inwiefern ist die Aufgabe für den Erwerb von Kompetenzen geeignet?

Für diese Aufgabe werden verschiedene Begriffe von den Schülerinnen und Schülern vorausgesetzt. Zum einen brauchen die Lernenden ein Verständnis von verschiedenen Zahlengrößen (Anzahl SuS in der Klasse / Anzahl Personen in der Schule / Anzahl Menschen auf der Erde / Dezimalzahlen / Brüche /...), andererseits muss auch ein gewisses Verständnis

von Masseinheiten (Centimeter – Meter – Kilometer) vorausgesetzt werden. Auch die Berechnung von Durchschnittswerten sollte beherrscht werden. Um die Aufgaben ab dem Niveau B erfolgreich zu bewältigen, müssen die Schülerinnen und Schüler die Grundoperationen (Addition, Subtraktion, Division, Multiplikation) beherrschen.

Lösung Niveau A:

Mann: 180 cm Frau: 165 cm Kind: 100 cm	Mann: 15m <sup>2</sup> Frau: 15m <sup>2</sup> Kind: 10m <sup>2</sup>
1a). eigener Schnitt, da nur Klasse = 150 cm 20 SuS · 150cm = 3000cm = 30m	2a). Schnitt SuS = 10m <sup>2</sup> 20 SuS · 10m <sup>2</sup> = 200m <sup>2</sup>
1b). gleicher Schnitt = 150 cm 400 SuS · 150cm = 60000cm = 600m	2b). Schnitt SuS = 10m <sup>2</sup> 400 SuS · 10m <sup>2</sup> = 4000m <sup>2</sup>
1c). 3'000'000'000 Männer · 180cm = 5'400'000'000 m  3'000'000'000 Frauen · 165cm = 4'950'000'000m  2'000'000'000 Kinder · 100cm = 2'000'000'000m  5'400'000'000m + 4'950'000'000m + 2'000'000'000m = 12'350'000'000m  12'350'000'000m = <u>12'350'000km</u>  12'350'000/ 40'000 = <u>309-Mal</u>	1c). 6'000'000'000 Männer und Frauen · 15m <sup>2</sup> = 90'000'000'000 m <sup>2</sup> = 90'000 km <sup>2</sup>  2'000'000'000 Kinder · 10m <sup>2</sup> = 20'000'000'000 m <sup>2</sup> = 20'000 km <sup>2</sup>  90'000 km <sup>2</sup> + 20'000km <sup>2</sup> = <u>110'000 km<sup>2</sup></u>  110'000 km <sup>2</sup> entspricht einer Fläche von Kuba oder ca. 2.5x der Schweiz  

### Begriffsbildungsprozess:

- Konkretisierung: Messen der Armlängen verschiedener Personen und Errechnen des Durchschnitts
- Abgrenzung zwischen Zentimeter – Meter – Kilometer sowie Quadratzentimeter – Quadratmeter – Quadratkilometer → Unterscheiden der verschiedenen Einheiten

- Bedeutung: Armlänge · Anzahl Personen = Distanz der Menschenkette respektive Platzbedarf · Anzahl Personen = benötigte Fläche
- Vernetzung: Rückwärtsrechnen (z.B. Wie viele Personen braucht es nun für die Strecke Erde – Mond?)

Kompetenzerwerb nach Lehrplan 21:

		Kompetenzbereiche		
		(1) Zahl und Variable	(2) Form und Raum	(3) Grössen, Funktionen, Daten und Zufall
Handlungsaspekte	(A) Operieren und Benennen	1. ... verstehen und verwenden arithmetische Begriffe und Symbole. Sie lesen und schreiben Zahlen. 2. ... können flexibel zählen, Zahlen nach der Grösse ordnen und Ergebnisse überschlagen. 3. ... können addieren, subtrahieren, multiplizieren, dividieren und potenzieren. 4. ... können Terme vergleichen und umformen, Gleichungen lösen, Gesetze und Regeln anwenden.	1. ... verstehen und verwenden Begriffe und Symbole. 2. ... können Figuren und Körper abbilden, zerlegen und zusammensetzen. <b>3. ... können Längen, Flächen und Volumen bestimmen und berechnen.</b>	1. ... verstehen und verwenden Begriffe und Symbole zu Grössen, Daten, Funktionen und Zufall. <b>2. ... können Grössen schätzen, messen, umwandeln, runden und mit ihnen rechnen.</b> 3. ... können funktionale Zusammenhänge beschreiben und Funktionswerte bestimmen.
	(B) Erforschen und Argumentieren	1. ... können Zahl- und Operationsbeziehungen sowie arithmetische Muster erforschen und Erkenntnisse austauschen. 2. ... können Aussagen, Vermutungen und Ergebnisse zu Zahlen und Variablen erläutern, überprüfen und begründen. 3. ... können beim Erforschen arithmetischer Muster Hilfsmittel nutzen.	<b>1. ... können geometrische Beziehungen, insbesondere zwischen Längen, Flächen und Volumen, erforschen, Vermutungen formulieren und Erkenntnisse austauschen.</b> 2. ... können Aussagen und Formeln zu geometrischen Beziehungen überprüfen, mit Beispielen belegen und begründen.	1. ... können zu Grössenbeziehungen und funktionalen Zusammenhängen Fragen formulieren, diese erforschen sowie Ergebnisse überprüfen und begründen 2. ... können Sachsituationen zur Statistik, Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit erforschen, Vermutungen formulieren und überprüfen.
	(C) Mathematisieren und Darstellen	1. ... können Rechenwege darstellen, beschreiben, austauschen und nachvollziehen. MA.1.C.1 2. ... können Anzahlen, Zahlenfolgen und Terme veranschaulichen, beschreiben und verallgemeinern MA.1.C.2	1. ... können Körper und räumliche Beziehungen darstellen. 2. ... können Figuren falten, skizzieren, zeichnen und konstruieren sowie Darstellungen zur ebenen Geometrie austauschen und überprüfen. 3. ... können sich Figuren und Körper in verschiedenen Lagen vorstellen, Veränderungen darstellen und beschreiben (Kopfgeometrie) 4. ... können in einem Koordinatensystem die Koordinaten von Figuren und Körpern bestimmen bzw. Figuren und Körper aufgrund ihrer Koordinaten darstellen sowie Pläne lesen und zeichnen.	1. ... können Daten zu Statistik, Kombinatorik und Wahrscheinlichkeit erheben, ordnen, darstellen, auswerten und interpretieren. 2. ... können Sachsituationen mathematisieren, darstellen, berechnen sowie Ergebnisse interpretieren und überprüfen. 3. ... können Terme, Formeln, Gleichungen und Tabellen mit Sachsituationen konkretisieren.

## Erfasser dieses Eintrags

x Selbstveröffentlichung mit eigenem Account: Til Holenstein

## Autor/innen

Dieses Material wurde im Rahmen eines Moduls Kompetenzorientierung im Mathematikunterricht von Enrico Combertaldi und Til Holenstein an der PH Luzern erstellt.

## Quellen:

Holzäpfel et al., (2018). Problemlösen lehren lernen – Kapitel 3. (S. 47 – 79)

Bilder:

Menschenkette: <https://pixabay.com/de/illustrations/kinder-menschenkette-frieden-5044223/>

Globus mit Kuba: [TUBS, Cuba on the globe \(Americas centered\), CC BY-SA 3.0](#)