PROBLEM

KAUGUMMIVERPACKUNG

MA06.02
26.05.2023

Studierende: Lorena Bortolan und Géraldine Lötscher
Dozentin: Luzia Christen

1 Aufgabenstellung

Die vorliegende Problemlöseaufgabe basiert auf der Aufgabe 8 in der Lernumgebung 13 im Mathbuch 1 (Affolter et al., 2013). Folglich wird die Problemlöseaufgabe erläutert:

Problem 1: «Verpackungsproblem»

Wie sieht die bestmögliche Verpackung (geschlossen) aus einem A4 Blatt für Kaugummis aus?

Beachte dabei folgende Faktoren bei der Herstellung deiner Verpackung:

a) Volumengrösse

b) Abfallmaterial

c) Transport

d) eigene Faktoren

Begründe deine Antwort in 5 Sätzen. Die folgenden Wörter baust du in deinem Text ein:

Abwicklung, Volumengrösse, Abfallmaterial und Transport

Abbildung 1: Verpackungen (unsplash.com, 2023)

2 Begründung

Authentizität

Eine Aufgabe ist nur dann ein authentisches Problem, wenn die Lernenden aktiv Hindernisse überwinden müssen, um eine Lösung zu finden (Holzäpfel et. al., 2018). Des Weiteren regen authentische Probleme die Lernenden dazu an, originäre mathematische Tätigkeiten auszuführen, wie das Entdecken von Problemen, die Auswahl unterschiedlicher Ansätze und das Interpretieren von Ergebnissen. Ausserdem heben Holzäpfel et al. (2018) hervor, dass durch authentisches Problemlösen die Schüler und Schülerinnen mehrere Runden in der Problemlösung durchlaufen können. In Anbetracht auf die erstellte Problemlöseaufgabe müssen die Schüler und Schülerinnen mehrere Hürden überwinden, um schlussendlich das Problem zu lösen. Darunter müssen sie sich einerseits mit den verschiedenen Volumina (grösstmöglich, kleinstmöglich, Optimum?), der Form, des möglichen Abfalls des A4 Papiers und dem Transport auseinandersetzen. Wie soll die Verpackung aussehen, damit möglichst viele Kaugummis Platz haben? Wie soll die Verpackung aussehen, damit möglichst wenig Abfall entsteht? Wie soll die Verpackung aussehen, damit beim Transport möglichst viele Verpackungen mitgeliefert werden können?
Gleichzeitig entsteht die Möglichkeit sich mit den mathematischen Konzepten auseinanderzusetzen und diese beim Problemlöseprozess anzuwenden. Aus diesen Gründen soll es möglich sein, dass die Schüler und Schülerinnen mehrere Runden, wie Holzäpfel et al. (2018) meinen, durchlaufen können.

Offenheit

Offenheit spielt eine zentrale Rolle beim Problemlösen, da sie uns erlaubt, neue Ideen zu erkunden und alternative Ansätze zu berücksichtigen. Die Aufgabenstellung «Wie sieht die bestmögliche Verpackung für Kaugummis aus?» ist offen und bietet verschiedene Zugänge, jedoch sind drei Orientierungspunkte wie Volumengrösse, Abfallmaterial und Transport gegeben. Dabei wird die Flexibilität gefördert, um sich anzupassen und verschiedene Lösungswege zu betrachten. Das bedeutet, wenn eine Herangehensweise nicht erfolgreich ist, wechselt man auf eine Andere. Offenheit ermöglicht es uns, aus Fehlern zu lernen und neue Informationen aufzunehmen, um fundiertere Entscheidungen zu treffen. Holzäpfel et al. (2018) ermutigen uns ein gutes Problem, über traditionelle Denkmuster hinauszugehen und innovative Lösungsansätze zu finden. Da es sich hier um Schachtelabwicklungen handelt aus einem A4 kann das Problem auch enaktiv angegangen werden, was bedeutet, dass sie aktiv durch Erfahrung und Interaktion mit der Umwelt erworben werden. Schlussendlich führt Offenheit zu einer positiven Einstellung gegenüber Problemen, indem wir sie als Chancen zur persönlichen Weiterentwicklung betrachten.

Differenzierungsvermögen

Nach Holzäpfel et al. (2018) gibt es verschiedene Aufgabenformate, die sicherstellen sollen, dass unterschiedliche Leistungsvermögen und Arbeitsweisen der Lernenden berücksichtigt werden. Diese Aufgabenformate ermöglichen es, verschiedene Differenzierungsaspekte wie Lerntempo und Selbstregulationsfähigkeiten einzubeziehen. Es gibt vier differenzierende Aufgabenformate, nämlich Paralleldifferenzierung, Stufendifferenzierung, Selbstdifferenzierung sowie Wahl und Pflicht. Diese unterscheiden sich in der Anordnung von Teilaufgaben, Aufgaben und Aufgabengruppen, um Anforderungen auf die Lerngruppe zu verteilen und ihre Bearbeitung zeitlich und methodisch zu strukturieren.

Für das vorgestellte Problem wird einerseits die Selbstdifferenzierung und andererseits verschiedene Tippkarten eingesetzt. Somit erhalten die Schüler und Schülerinnen selbstständig die Möglichkeit zu differenzieren aber auch Hilfestellung von der Lehrperson selbst.

Mögliche Tippkarten:

<u>Tippkarten zum Volumen</u>

1. Gehe von einem Quader aus und bestimme die gewünschte Form: Überlege dir, welche Länge (l), Breite (b) und Höhe (h) der Quader haben soll. Diese Einheiten können beliebig gewählt werden, solange sie die Begrenzungen des A4-Blatts (29,7 cm x 21 cm) nicht überschreiten. Da es um eine sinnvolle Verpackung geht, vergiss den Deckel nicht.

2. Erstelle dir zur Hilfe eine Skizze der Abwicklung: Zeichne eine Skizze von einem Quader und markiere die Einheiten *l*, *b* und *h* auf deiner Skizze. Stelle sicher, dass du die Proportionen und Relationen zwischen den Seiten richtig darstellst.

3. Übertrage die Einheiten auf das A4-Blatt: Nutze ein Lineal oder einen Zirkel, um die Länge (l), Breite (b) und Höhe (h) auf das A4-Blatt zu übertragen. Achte darauf, die Masse genau abzumessen und sie entsprechend zu markieren.

4. Berechne die Längen der Abwicklung: Verwende die übertragenen Einheiten auf dem A4-Blatt, um die Längen der Abwicklung des Quaders zu berechnen. Beachte, dass die Längen der Abwicklung von den gewählten Dimensionen abhängen und je nach Quaderform variieren können.

5. Füge die markierten Längen zusammen: Addiere die markierten Längen auf dem A4-Blatt entsprechend der Anordnung der Abwicklung. Zum Beispiel, wenn du ein Rechteck als Abwicklung hast, würdest du die Längen der einzelnen Seiten zusammenzählen.

Tipp: Wenig Restmaterial

Indem du die Abmessungen des Quaders sorgfältig wählst und die Flächen so effizient wie möglich auf dem A4-Blatt anordnest, kannst du das Restmaterial minimieren und eine möglichst kompakte Abwicklung erstellen.
Gehe von einer möglichst grossen Grundfläche aus.

Tipp: Stapeln

Versuche dir vorzustellen du stapelst deine Kaugummipackungen in einem Transportwagen. Welche Form der Verpackung eignet sich am besten?

Kompakte Formen bevorzugen: Wähle eine Quaderabwicklung, die möglichst kompakte Formen hat. Das bedeutet, dass die einzelnen Flächen der Abwicklung rechteckig oder quadratisch sein sollten, um das A4-Blatt optimal auszunutzen.

Vermeide Überlappungen: Stelle sicher, dass die einzelnen Flächen der Abwicklung nicht überlappen, um Verschwendung von Papier zu vermeiden. Überlappungen würden zusätzliches Material erfordern und könnten zu einem ineffizienten Stapel führen.

Gleichmässige Verteilung: Versuche, die Flächen gleichmässig auf dem A4-Blatt zu verteilen, um die Stabilität des Stapels zu gewährleisten und das Risiko von Umkippen oder Verformungen zu verringern.

Kleine Zwischenräume minimieren: Halte die Zwischenräume zwischen den einzelnen Flächen so gering wie möglich, um das Restmaterial zu minimieren. Diese kleinen Zwischenräume können sich bei der Stapelung addieren und zu grösseren verbleibenden freien Flächen führen.

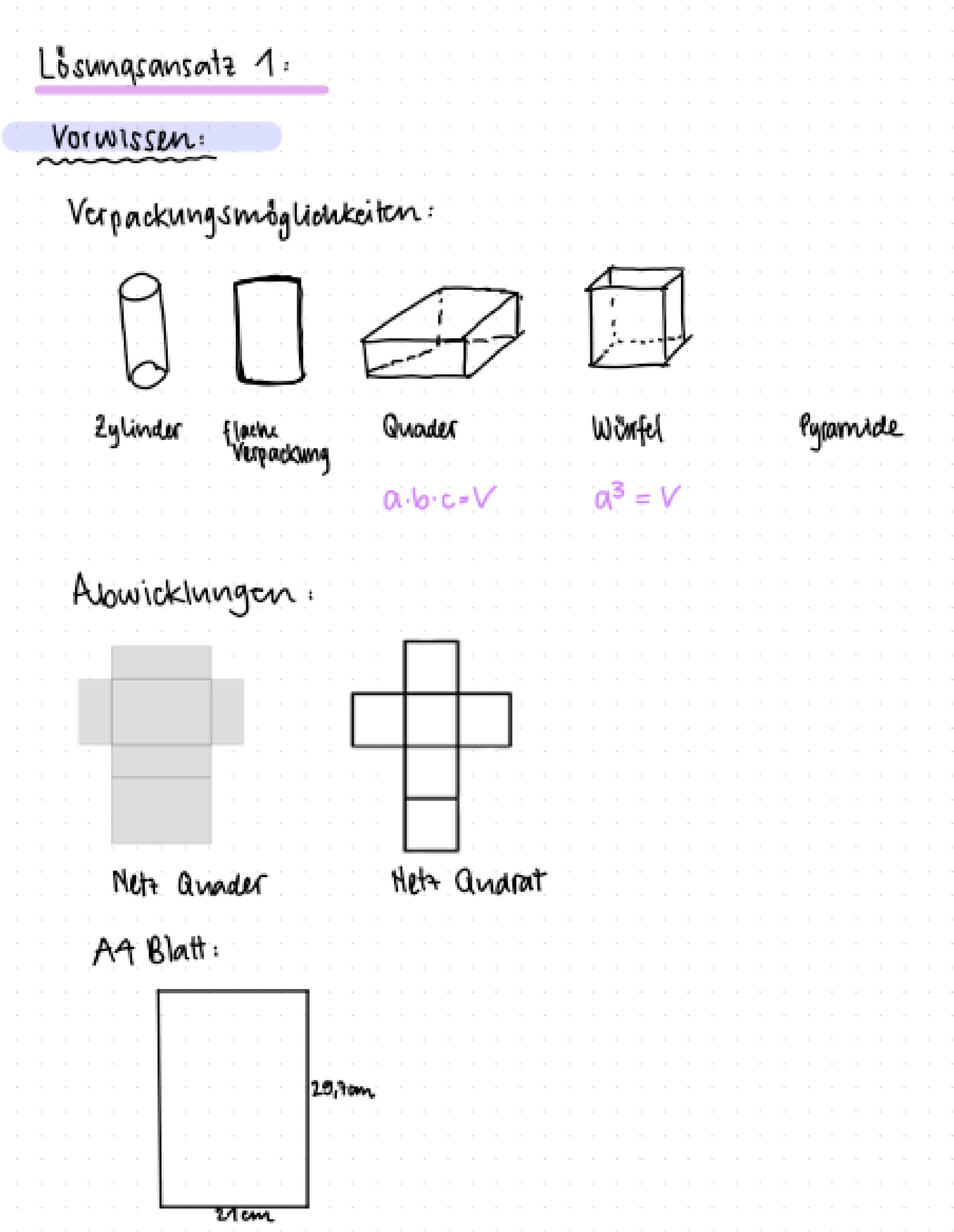
Tippkarte Visualisierung:

1. Nimm als Hilfestellung die Würfelschablonen vom Mathbuch. Setze einen Würfel zusammen und wickle diesen ab. So erhältst du ein Würfelnetz.
2. Nimm als Hilfestellung für eine Quaderabwicklung die zur Verfügung gestellte Teeschachtel. Wickle sie ab. So erhältst du das Netz eines Quaders, welches dir helfen kann.

3 Lösungsansätze

In den folgenden Unterkapiteln werden drei mögliche Schülerlösungsansätze präsentiert. Es wurde ebenfalls versucht, bei jedem Lösungsansatz sich an verschiedenen Zugängen zu bedienen.

3.1 Lösungsansatz 1



Planungsschritte:

① · Abwicklung des Quaders auf dem A4 Blatt aufzeichnen, ausschneiden und zusammenfalten

· Länge & Breite verändern

· → Wie verändert sich das Volumen?

② · Würfelnetz aus A4 Blatt aufzeichnen, ausschneiden und falten
↳ möglichst das ganze A4-Blatt verwenden

③ Zylinder rollen → mit den anderen Körper vergleichen (Volumen)

④ Abfall der kreierten Körper anschauen
↳ wie viele Überreste der A4 Blätter bleiben übrig?

⑤ Wie kann ich die versch. Verpackungen stapeln, damit möglichst wenig Platz verloren geht?

Durchführung:

① ▷ Quader 1: $l = 15cm$ $b = 10cm$ $h = 8cm$

$V = l \cdot b \cdot h = 15 \cdot 10 \cdot 3 = 195$

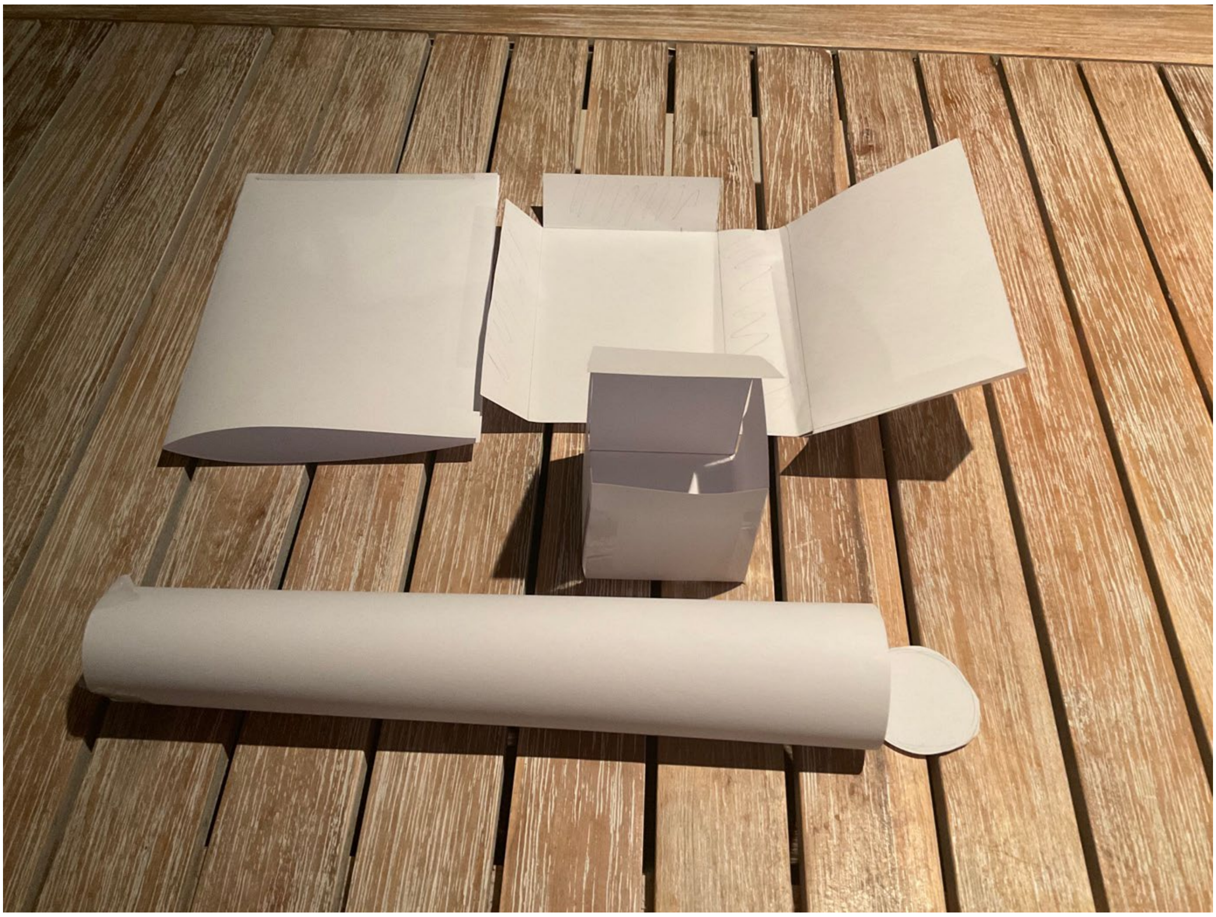
$V = 195cm^2$

▷ Quader 2: $l = 14cm$ $b =$ $h =$

$V = l \cdot b \cdot h =$

$V =$

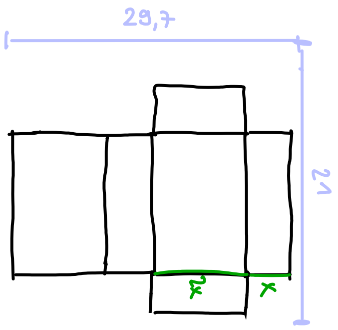
▷ Quader 3: $l = 15cm$ $b =$ $h =$



3.2 Lösungsansatz 2

Lösungsansatz 2:

Wie sieht ein Quadernetz aus?



$$x + 2x + x + 2x = 29{,}7$$
$$6x = 29{,}7 \quad |:6$$
$$x = \underline{\underline{4{,}95}}$$

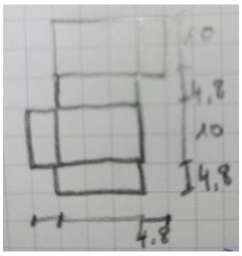
↳ Höhe

$$21 - 2x = \text{Länge}$$
$$21 - 9{,}9 = \underline{\underline{11{,}1}}$$

H= 4.95cm Länge = 11,1 cm
B= 4.95cm

$$11{,}1 \cdot 4{,}95 \cdot 4{,}95 = \underline{271{,}9\,\text{cm}^3}$$

Höhe und Breite müssen nicht gleich lang sein → Fehlvorstellung



Ausprobieren: Wie komme ich auf das grösse Volumen?

$29{,}7 = 10 + 4{,}8 + 10 + 4{,}8$

$21 - 4{,}8 - 4{,}8 = 11.4$

Breit = 10
Höhe = 4,8
Länge = 11.4

$10 \cdot 4{,}8 \cdot 11{,}4 = \underline{547{,}2\,cm^3}$ ✓

Geht es noch grösser?

$29{,}7 = 12 + 2{,}85 + 12 + 2{,}85$

$21 - 2{,}8 - 2{,}8 = 15{,}3$

Breite = 12
Höhe = 2,85
Länge = 15,3

$12 \cdot 2{,}85 \cdot 15.3 = \underline{\underline{523{,}26\,cm^3}}$

Volumen wird kleiner

$29{,}7 = 8 + 6{,}85 + 8 + 6{,}85$

$21 - 6{,}85 - 6{,}85 = 7{,}3$

Breite = 8
Höhe = 6,85
Länge = 7,3

$8 \cdot 6{,}85 \cdot 7{,}3 = \underline{400{,}04\,cm^3}$

3.3 Lösungsansatz 3

Lösungsansatz 3

a)

Quader

Höhe	Breite	Länge	Volumen
0,25	14,6	20,5	74,8
0,5	14,35	20,0	143,5
0,75	14,1	19,5	206,2
1	13,85	19,0	263,2
1,25	13,6	18,5	314,5
1,5	13,35	18,0	360,5
1,75	13,1	17,5	401,2
2	12,85	17,0	436,9
2,25	12,6	16,5	467,8
2,50	12,35	16,0	494
⋮	⋮	⋮	⋮
4,00	11,6	14,5	672,8
4,5	11,1	13,5	674,3
4,75	10,85	13.0	669,9

b) Beim Aufzeichnen von versch. Körpern fällt auf, dass beim Quader am wenigsten Papier weggeworfen wird. Bei einem Zylinder müssen die Grund- und Deckfläche ausgeschnitten werden.

c) Beim Stapeln von Zylindern sind zwischen den Körpern Leerflächen vorhanden. Diese könnten eigentlich auch genutzt werden.
Quader & Würfel weisen diese Probleme nicht auf. Sie eignen sich beide sehr gut beim Stapeln. Sie nutzen das ganze Volumen eines LKWs aus.

Frage beantworten: Quader ist die beste Verpackung
- wenig Abfall
- grosses Volumen
- gut stapelbar

Schriftliche Antwort:
Die beste Verpackung für Kaugummis aus einem A4 Blatt sollte genug Platz für viele Kaugummis haben, damit man möglichst viele davon hineinlegen kann. Gleichzeitig sollten wir darauf achten, dass wir dabei so wenig Abfallmaterial wie möglich produzieren, um die Umwelt zu schonen. Die Verpackung muss auch leicht zu transportieren sein, damit man sie einfach mitnehmen kann und gut verstauen kann. Das heisst die Verpackung muss sinnvoll sein, dass der Hersteller sie die Packungen gut stapeln kann für den Transport. Ausserdem müssen wir unsere eigenen Bedürfnisse und Wünsche berücksichtigen, wie zum Beispiel das Aussehen und das Design der Verpackung. Eine Idee könnte sein, das A4 Blatt geschickt zu falten, um den Platz optimal auszunutzen und eine schöne Verpackung zu bekommen. Wenn wir all diese Faktoren beachten, können wir eine Verpackung entwickeln, die praktisch, umweltfreundlich und unseren eigenen Vorstellungen entspricht.

4 Fachlicher Gehalt der Aufgabe

Kopfgeometrie fördert räumliches Vorstellungsvermögen und logisches Denken. Es beinhaltet das Lösen geometrischer Aufgaben im Kopf. Kopfgeometrie-Aufgaben sind anspruchsvolle Konzentrationsübungen, bei denen die Lernenden ihre Augen schliessen und sich ein Objekt und seine Bewegung im Raum vorstellen. Kippen oder Drehen eines Körpers können aber nicht nur in der Vorstellung erfolgen. Durch das A4 Blatt kann die Aufgabe auch enaktiv bearbeitet werden. Enaktive Aufgaben wie das Falten von Papier sind sinnvoll im Mathematikunterricht, da sie den Schülern und Schülerinnen ermöglichen, mathematische Konzepte praktisch zu erforschen und ihr räumliches Vorstellungsvermögen zu schulen.

Das Schneiden und Falten von Papier kann ebenfalls als Übungsfeld für räumliches Denken dienen. Eine gefaltete Figur kann entfaltet und ihre Form bestimmt werden, oder ein entfaltetes Papier kann nach der Faltung und dem Schnitt beschrieben werden. Es ist wichtig, die Schritte zeichnerisch zu verfolgen.

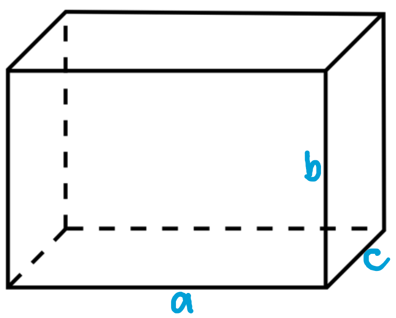
Die Problemstellung erfordert auch den präzisen Einsatz der Sprache durch das schriftliche Beantworten der Frage und verwenden der vorgegebenen Begriffe.

Folgende Begriffe sollten im Voraus geklärt werden:

Volumen: Volumen ist ein dreidimensionaler Begriff und bezieht sich auf den Raum, den ein Objekt einnimmt. Das Volumen kann für verschiedene geometrische Figuren wie Würfel, Kugeln, Zylinder oder auch unregelmässige Formen berechnet werden. Es wird in Kubikeinheiten angegeben, wie beispielsweise Kubikzentimeter (cm^3) oder Kubikmeter (m^3). Da ein A4-Blatt jedoch nur eine Fläche ist, hat es kein Volumen. Es ist wichtig, zwischen Fläche (zweidimensional) und Volumen (dreidimensional) zu unterscheiden.

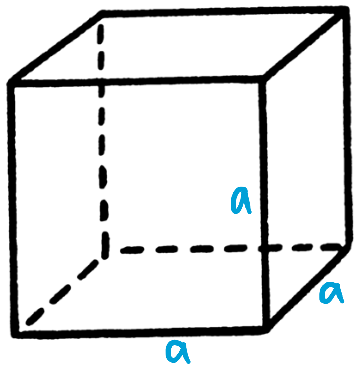
Quader: Ein Quader besteht aus Rechtecken oder Quadraten, wobei je zwei gegenüberliegende Rechtecke deckungsgleich sind. Das bedeutet, dass es drei Paare von gleichen Rechtecken gibt.

Der Quader hat insgesamt dreimal vier Kanten, die alle die gleiche Länge haben. Jedes Paar gegenüberliegender Kanten ist also gleich lang.



$$\boxed{V = a \cdot b \cdot c}$$

Würfel: Ein Würfel besteht aus sechs Quadraten, die alle gleich gross sind. Er hat insgesamt acht Ecken und zwölf Kanten. Es gibt elf verschiedene Möglichkeiten, den Würfel aufzuschneiden, sodass alle begrenzenden Flächen zusammenhängend auf einer Ebene ausgelegt werden können. Diese verschiedenen Schnitte werden als Würfelnetze/-abwicklungen bezeichnet.
Ein Würfel ist eine spezielle Form eines Quaders



$$\boxed{V = a \cdot a \cdot a = a^3}$$

Abwicklung oder Netz: Wenn ein Körper so geschnitten wird, dass alle begrenzenden Flächen an einer Ebene befestigt werden können, nennt man dies ein «Netz» oder eine «Abwicklung» des Körpers. Es gibt normalerweise mehrere Möglichkeiten, einen Körper auf diese Weise zu schneiden.

Quelle: Lexikon Mathbuch 1 (mathbuch.info, 2023).

A) Welche Begriffsbildungsprozesse können mit der Aufgabe angestossen werden?

Begriffsbildungsprozesse in der Mathematik spielen eine bedeutende Rolle, da sie den Schülern ermöglichen, mathematische Konzepte zu erfassen, auszutauschen und anzuwenden. Indem die Schüler ein Verständnis für die mathematischen Termini entwickeln, sind sie in der Lage, komplexe mathematische Herausforderungen zu analysieren, Lösungsansätze zu formulieren und ihre mathematischen Kenntnisse zu erweitern. Ein solider Begriffsbildungsprozess bildet das Fundament für eine tiefe mathematische Durchdringung und eine effektive mathematische Verständigung.

B) Inwiefern ist die Aufgabe für den Erwerb von Kompetenzen (Veranstaltung 1) geeignet?

Das Problemlösen kann im Mathematikunterricht verschiedene Rollen einnehmen. Aus der Abbildung 2 (Holzäpfel et al., 2018) kann dies entnommen werden:

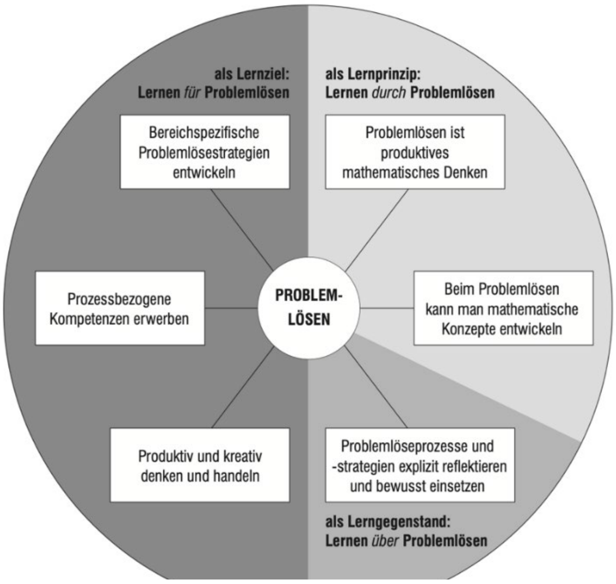


Abbildung 2: Problemlösen als Lernziel, Lernprinzip und Lerngegenstand (Holzäpfel et al., 2018).

Wie in der Abbildung 2 ersichtlich ist, kann das Problemlösen als ein Prinzip des Unterrichts betrachtet werden, das sowohl für Lehrpersonen als auch Lernende gilt. Es beinhaltet das Konzept des «Lehrens und Lernens durch Problemlösen», bei dem Lernende aktiv an mathematischen Situationen arbeiten und mathematisches Denken entwickeln.

Beim Problemlösen geht es darum, dass Lernende sich nicht einfach an vorgegebene Lösungswege halten, sondern produktiv mit mathematischen Situationen umgehen. Es geht darum, mathematisches Denken zu fördern, wie es von Mathematikpädagogen wie Schönfeld (Holzäpfel et al., 2018) beschrieben wird.

Noch weitergehend sollen Schüler und Schülerinnen nicht nur vorgegebene mathematische Konzepte anwenden, sondern diese Konzepte aktiv beim Problemlösen entwickeln. Dies bedeutet, dass sie beim Lösen von Problemen ein Verständnis für den Zweck und die Bedeutung der jeweiligen mathematischen Ideen entwickeln sollen, wie es von Mathematikpädagogen wie Winter und Freudenthal betont wird (Holzäpfel et al., 2018). Es geht darum, dass die Schüler und Schülerinnen die Mathematik nicht nur anwenden, sondern sie auch verstehen, warum sie relevant ist.

Bei diesem Problem können die Schüler und Schülerinnen auf das Volumen verschiedener Körper zurückgreifen aber auch auf das Abwickeln. Darüber hinaus können sie weiteres Können (Terme aufstellen, Variablen einsetzen, etc.) anwenden, um das Problem zu lösen. Zeitgleich ist es ihnen möglich sich an verschiedenen Repräsentationsformen zu bedienen. Des Weiteren ist es ihnen offen gestellt, ob sie sich formal enaktiv an das Problem herantasten. Bei allen Varianten ist gegeben, dass die Schüler und Schülerinnen aufgefordert sind auszuprobieren und zu reflektieren.

5 Literatur

Affolter, W.; Jaggi, Beat; Wieland, G.; Wirth, M.; Wälti, Beat; Nydegger, Annegret; Krummenacher, R.; Jundt, W.; Beerli, G. (2013). *mathbuch 1: Lehrmittel für die Sekundarstufe 1 [Lehrbuch].* Bern / Baar: Schulverlag plus / Klett und Balmer.

Holzäpfel et al.. 2018. Problemlösen lehren Lernen – Kapitel 3.

Holzäpfel et al.. 2018. Problemlösen lehren Lernen – Kapitel 1.

Abbildung Problemaufgabe Verpackungen: https://unsplash.com/de/fotos/RWTUrJf7I5w (2023).