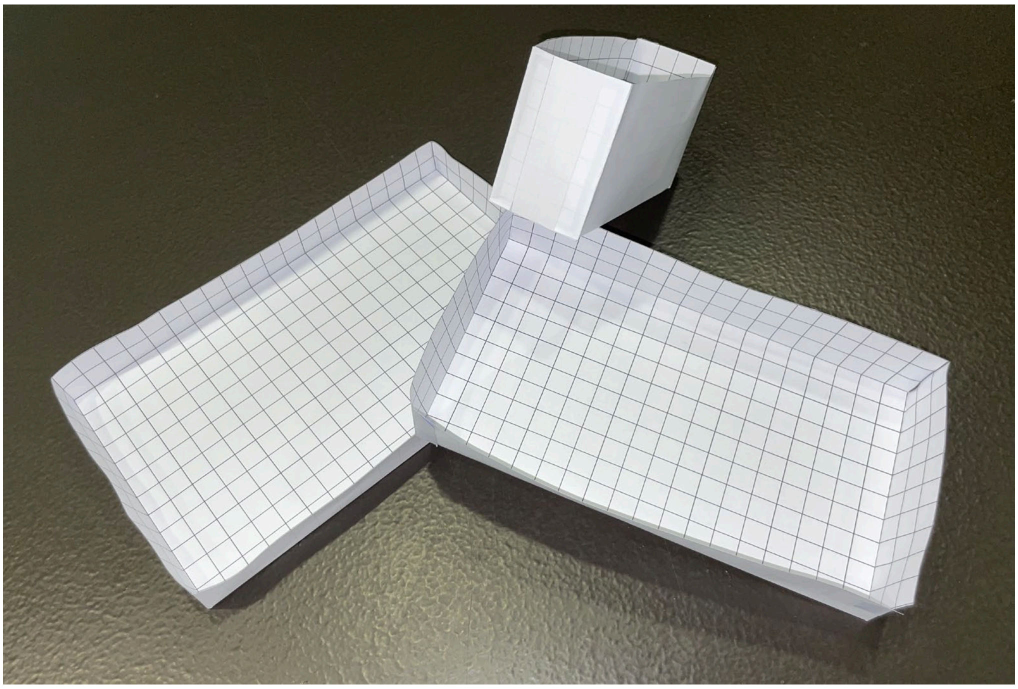
Problemlöse-Aufgabe «Schachteln falten»[1]

Mit dieser Problemlöseaufgabe soll den Lernenden gemäss den Kriterien Offenheit, Authentizität und Differenzierungsvermögen von Holzäpfel et al. (2018) die Möglichkeit geboten werden kompetenzorientiert Mathematikunterricht zu betreiben.



Aufgabenstellung

Ein Papier von 24 cm x 16 cm enthält waagrechte und senkrechte Linien im Abstand von 1 cm. Entlang dieser Linien wird gefaltet und ev. kleine Rechtecke weggeschnitten. Dadurch entstehen offene Schachteln.

a) Stelle drei unterschiedliche Schachteln her. Welche unterschiedlichen Schachteln können hergestellt werden? Vergleiche die Schachteln und weggeschnittenen Rechtecke miteinander.
b) Wie verändert sich das Volumen der Schachtel, wenn sich die Höhe, Breite oder Länge der Schachtel verändert?
c) Die Schachtel soll mit Spielwürfeln gefüllt werden. Ein Spielwürfel hat die Masse 1 cm · 1 cm · 1 cm. Welche Schachtel eignet sich dazu am besten? Begründe deine Wahl.
d) In einer Schachtel sollen 560 Spielwürfel (Volumen = 1 cm x 1 cm x 1 cm) versorgt werden. Welche Masse muss die Schachtel haben, damit alle Spielwürfel darin Platz finden?

---

[1] Diese Aufgabe wurde abgeändert und stammt ursprünglich aus dem Lehrmittel aus dem Schulbuch vom mathbuch 1 (LU13, Aufgabe 7, S. 39)

Begründung der «guten» Problemlöseaufgabe anhand den Kriterien Differenzierungsvermögen, Offenheit, Authentizität. Die nachfolgenden zwei Seiten stützt sich auf dem Text von Holzäpfel et al. (2018)

Durch den Einbezug des Erforschens, welches beispielsweise bei der Aufgabe a) in Kraft tritt – die Schüler*innen sollen selbst unterschiedliche Schachteln herstellen (enaktiv) – wird die Individualität, Problemlösestrategien und ein vertiefterer Lernprozess gefördert. Die Lernenden können bei dieser selbstständigen Arbeit individuelle Lösungen entwickeln, welche im Unterricht in einem weiteren Schritt miteinander in Verbindung gebracht und verglichen werden können. Dadurch kann die Aufgabe selbstdifferenziert gelöst werden, was wiederum das selbstständige Lernen fördert. Auch das operative Prinzip, welches für guten Mathematikunterricht steht, wird durch diese Aufgabenstellung aufgenommen. Dabei werden Eigenschaften der Schachteln wahrgenommen, Operationen ausgeführt (beispielsweise mit der Aufgabe b und anhand der Fragestellung «was passiert mit …. wenn …» gearbeitet.
Mit der letzten Aufgabe d), bei welcher das Volumen anhand der Anzahl Spielwürfel vorgegeben ist, kommt die Problemlösefähigkeit in einer etwas anderen Variante zum Einsatz. Im Unterschied zu den vorangegangenen Teilaufgaben müssen die Schüler*innen ihre Gedankenwege in umgekehrter Reihenfolge durchführen. Anhand eines Zieles – die vorgegebene Anzahl an Spielwürfeln zu versorgen – muss eine günstige Ausgangslage geschaffen werden.

Offenheit
Bei unserem Problem handelt es sich um eine Aufgabe mit bekannter Ausgangslage und bekanntem Ziel. Dies kann einerseits einschränkend sein. Die Möglichkeit verschiedene Herangehensweisen auszuprobieren, bringt andererseits mehr Offenheit mit sich. Dank der Offenheit bezüglich verschiedener korrekter Lösungswege können die Lernenden den Wert ihres mathematischen Tuns erfahren. Dies führt zu einer nachhaltigen, intrinsischen Motivation.

Das Ausmass des Problems bzw. die Höhe der Barriere ist variierbar und unterschiedet sich zwischen den Teilaufgaben. Wo bei Teilaufgabe c) die Frage noch sehr offen formuliert ist, ist diejenige von Aufgabe d) wiederum einschränkend und ermöglicht nur einzelne korrekte Lösungen (durch die bewusst gewählte Anzahl an Spielwürfeln, welche viele Teiler besitzt, sind jedoch trotzdem verschiedene Lösungen möglich).

Lernende benötigen bei solchen Aufgaben verschiedenste Werkzeuge. Wenn sie diese noch nicht besitzen, sollen bzw. müssen sie diese neue erfinden.

Ziel aller vier Teilaufgaben ist es, die Beziehungen zwischen Länge, Fläche und Volumen herauszufinden und zu vertiefen. Uns als Lehrpersonen ist dies bereits zu Beginn klar. Gewisse Lernende werden jedoch erst gegen Ende der Aufgabe diese Zusammenhänge wahrnehmen und verstehen.

Durch das Weglassen von Informationen zur Ausgangssituation können wir erreichen, dass die Lernenden sich nicht vorzeitig für einen bestimmten Lösungsweg entscheiden und verschiedene Wege möglich bleiben. Zudem konnten wir so aus einer geschlossenen Aufgabe ein Problem machen.

Differenzierungsvermögen

Bei Problemlöseaufgaben lassen sich, je nach Aufgabentyp andere Differenzierungsmöglichkeiten berücksichtigen – seien dies Lerntempo, Selbstregulationsfähigkeit oder Interessen. Dies ist auch bei unserer Aufgabe der Fall. Dadurch, dass die Schwierigkeit der Fragen von Teilaufgabe zu Teilaufgabe wächst, handelt es sich um eine stufendifferenzierte Aufgabe. Beispielsweise können die Lernenden eine Schachtel herstellen, zeichnen und mit Angabe der Masse definieren, in welcher Spielwürfel Platz finden. Stärkere Schüler*innen können dagegen versuchen, die Schachtel zu finden, in der am meisten Würfel Platz haben.

Bereits die Teilaufgabe a) kann auf verschiedene Arten (verschiedene Quadrate können weggeschnitten werden) gelöst werden und ist somit selbstdifferenziert, sodass die einzelnen Lernenden auf individuelle Lösungen kommen und von diesen aus weiterarbeiten können. Unabhängig von ihrem Leistungsniveau oder ihren Voraussetzungen oder Vorlieben bekommen alle Lernenden dieselbe Aufgabe angeboten. Dadurch, dass somit keine konkrete Lösung definiert ist, kommen verschiedenste Herangehensweisen zum Zug. Das Ziel ist hier also neben dem Aufbau des Verständnisses für den mathematischen Sachverhalt, das Erzeugen und anschliessende Nutzen von Vielfalt (bei den Aufgaben b bis d gibt es viele verschiedene Möglichkeiten, wie die Aufgaben gelöst werden können). Die von den Lernenden gefundenen Herangehensweisen und Lösungswege sollen miteinander in Verbindung gebracht und verglichen werden. Die Konfrontation mit verschiedenen Lösungswegen löst in den Lernenden eine Reflexionsphase aus, während welcher sie ihr eigenes Vorgehen überdenken.

Neben der enaktiven Herangehensweise haben die stärkeren Schüler*innen die Option, die weiterführenden Fragen (Aufgabe b bis d) mittels Kopfgeometrie oder dem Anfertigen von simplen Skizzen zu beantworten.

Authentizität

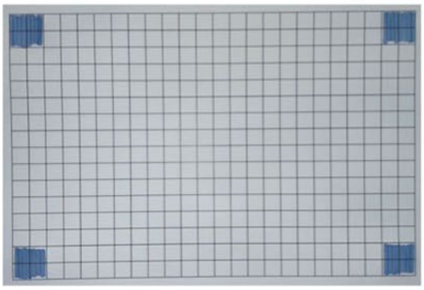
Die Aufgabe wird dadurch authentischer, dass bei den Teilaufgaben meist mehrere Lösungen möglich und richtig sind. Zur Beantwortung der gestellten Fragen können die Schüler*innen verschiedene Lösungswege einschlagen. Das Auswählen von unterschiedlichen Ansätzen und das Beschreiten von Wegen ermöglichen es den Lernenden, echte Entscheidungen zu treffen.

Dadurch, dass das Ziel offen formuliert wird und der Weg, der zur Lösung führen kann, nicht vorgegeben ist, gibt es nicht einfach einen richtigen Weg. Die Schüler*innen müssen für sich selbst entscheiden, was für sie das Ziel darstellt. Somit sind sie in den Problemlöseprozess eingebunden und nehmen eine aktive Rolle ein. Wenn die Lernenden vor eine Situation gestellt werden, in welcher sie aktiv eine Barriere überwinden müssen, um zu einer Lösung zu gelangen, wird von einem authentischen Problem gesprochen.

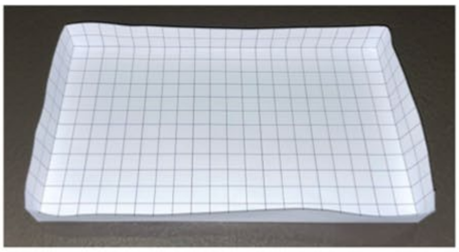
Die unterschiedlichen Lösungswege können im Klassenverband diskutiert werden. Dies regt die Lernenden zur Reflexion ihrer eigenen Vorgehensweise und die der Mitschüler*innen an. Die Interpretation der Ergebnisse führt dazu, dass weiter gefragt und mehr Interesse gezeigt wird.

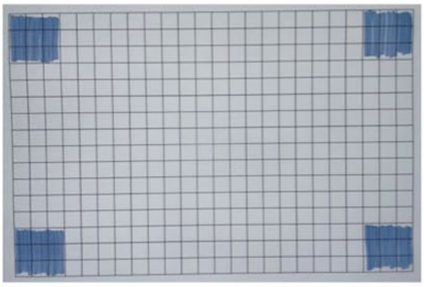
Mögliche Lösungsansätze

a) Stelle drei unterschiedliche Schachteln her. Welche unterschiedlichen Schachteln können hergestellt werden? Vergleiche die Schachteln und weggeschnittenen Rechtecke miteinander.

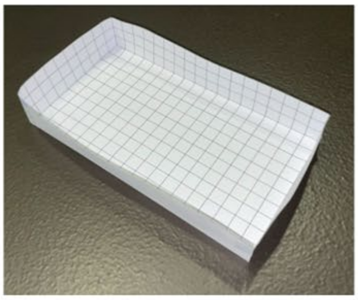


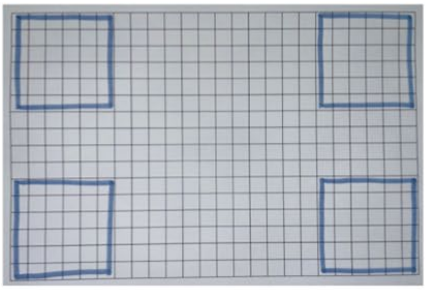
flache Schachtel mit grosser Grundfläche



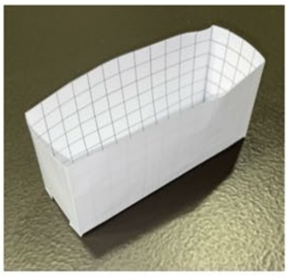


"mittelhohe" Schachtel

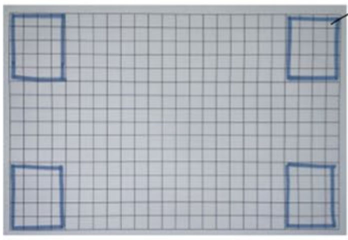




hohe Schachtel mit kleiner Grundfläche



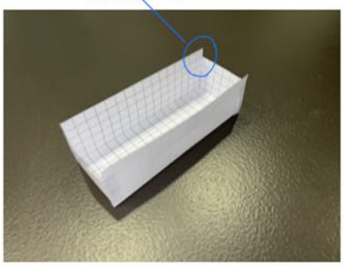
Erkenntnis der Schüler*innen:



die Schüler*innen sollen bei dieser Aufgabe erkennen, dass immer ein Quadrat weggeschnitten werden muss

↳ wenn ein Rechteck mit zwei unterschiedlichen Seitenlängen a & b ausgeschnitten werden (wie hier im Beispiel), entsteht eine Schachtel mit unterschiedlich hohen Seitenwänden → dies ist nicht möglich/erwünscht

ist nicht erwünscht



b) Wie verändert sich das Volumen der Schachtel, wenn sich die Höhe, Breite oder Länge der Schachtel verändert?

1. Ansatz (enaktiv)

- verschiedene Schachteln (analog zu Aufgabe A) falten
  - aus Plexiglas herstellen, sodass sie mit Wasser gefüllt werden können
    - → Volumen der Körper kann anhand der Füllkapazität miteinander verglichen werden

2. Ansatz (symbolisch)

$V = \text{Höhe} \cdot \text{Breite} \cdot \text{Länge} = h \cdot b \cdot l$

$\frac{1}{2}V = \frac{1}{2}h \cdot b \cdot l$ $\frac{1}{2}V = h \cdot \frac{1}{2}b \cdot l$ $\frac{1}{2}V = h \cdot b \cdot \frac{1}{2}l$

ODER

$2V = 2h \cdot b \cdot l$ $2V = h \cdot 2b \cdot l$ $2V = h \cdot b \cdot 2l$

⇒ wenn sich die Höhe / Breite / Länge halbiert, halbiert sich auch das Volumen des Körpers

⇒ wenn sich die Höhe / Breite / Länge verdoppelt, verdoppelt sich auch das Volumen des Körpers

3. Ansatz (anhand von Zahlenbeispielen)

die momentane Schachtel hat die Masse: Länge = 12cm, Breite = 20cm, Höhe = 2cm → $V = 480cm^3$

→ Verdoppelung der Länge: (Breite & Höhe bleiben gleich)

$l = 2 \cdot 12cm = 24cm$

$V = 24cm \cdot 20cm \cdot 2cm = 960cm^3$

⇒ Länge wurde verdoppelt → Volumen verdoppelt sich ebenfalls

Durch z.B. enaktive Umsetzung kann erkannt werden, dass dies keine mögliche Lösung für das Problem ist (vgl. Papiergrösse 24cm · 16cm).

→ Halbierung der Höhe: (Länge & Breite bleiben gleich)

$h = \frac{1}{2} \cdot 2cm = 1cm$

$V = 12cm \cdot 20cm \cdot 1cm = 120cm^3$

⇒ Höhe wurde halbiert → Volumen halbiert sich ebenfalls

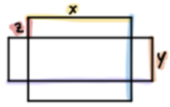
⇒ wenn sich die Höhe / Breite / Länge halbiert, halbiert sich auch das Volumen des Körpers

⇒ wenn sich die Höhe / Breite / Länge verdoppelt, verdoppelt sich auch das Volumen des Körpers

c) Die Schachtel soll mit Spielwürfeln gefüllt werden. Ein Spielwürfel hat die Masse 1 cm · 1 cm · 1 cm. Welche Schachtel eignet sich dazu am besten?

– anhand der Schachteln aus Aufgabe A ausprobieren (erproben)
  ↳ begründen, weshalb sich für die eine oder andere Schachtel entschieden wird

- flache Schachtel mit grosser Grundfläche eignet sich am besten, da durch die grosse Grundfläche eine grosse Stabilität zwischen den Würfeln / in der Schachtel entsteht
- eine hohe Schachtel eignet sich am besten, da hierbei auch eine etwas weniger stabile Schachtel verwendet werden kann, mit welcher die Würfel hochgehalten werden können
- Bezug zum Volumen:
  $V = G \cdot h$
  $V = x \cdot y \cdot z$



24cm
16cm

in welche Box passen am meisten Spielwürfel?

je grösser das Volumen, desto mehr Spielwürfel passen in die Box

$24cm = x + 2z \longrightarrow z = 12cm - \frac{1}{2}x$

$16cm = y + 2z \longrightarrow z = 8cm - \frac{1}{2}y$

$12cm - \frac{1}{2}x = 8cm - \frac{1}{2}y \quad | \cdot 2$

$24cm - x = 16cm - y \quad | + x \quad | + y$

$y + 24cm = x + 16cm \quad | - 24cm$

$y = x - 8cm$

ausprobieren:

$z = 1cm$

$\longrightarrow 1cm = 12cm - \frac{1}{2}x \quad | + \frac{1}{2}x \quad | - 1cm$

$\frac{1}{2}x = 11cm \quad | \cdot 2$

$x = 22cm$

$\longrightarrow 1cm = 8cm - \frac{1}{2}y \quad | + \frac{1}{2}y \quad | - 1cm$

$\frac{1}{2}y = 7cm \quad | \cdot 2$

$y = 14cm$

$V = 1cm \cdot 22cm \cdot 14cm = 308cm^3$

$z = 3cm$

$\longrightarrow 3cm = 12cm - \frac{1}{2}x \quad | + \frac{1}{2}x \quad | - 3cm$

$\frac{1}{2}x = 9cm \quad | \cdot 2$

$x = 18cm$

$\longrightarrow y = 18cm - 8cm = 10cm$

$V = 3cm \cdot 18cm \cdot 10cm = 540cm^3$

$z = 7cm$

$\longrightarrow 7cm = 12cm - \frac{1}{2}x \quad | + \frac{1}{2}x \quad | - 7cm$

$\frac{1}{2}x = 5cm \quad | \cdot 2$

$x = 10cm$

$\longrightarrow y = 10cm - 8cm = 2cm$

$V = 7cm \cdot 10cm \cdot 2cm = 140cm^3$

$z = 2cm$

$\longrightarrow 2cm = 12cm - \frac{1}{2}x \quad | + \frac{1}{2}x \quad | - 2cm$

$\frac{1}{2}x = 10cm \quad | \cdot 2$

$x = 20cm$

$\longrightarrow y = 20cm - 8cm = 12cm$

$V = 2cm \cdot 20cm \cdot 12cm = 480cm^3$

$z = 4cm$

$\longrightarrow 4cm = 12cm - \frac{1}{2}x \quad | + \frac{1}{2}x \quad | - 4cm$

$\frac{1}{2}x = 8cm \quad | \cdot 2$

$x = 16cm$

$\longrightarrow y = 16cm - 8cm = 8cm$

$V = 4cm \cdot 8cm \cdot 16cm = 512cm^3$

⇒ von $z = 1cm$ bis $z = 3cm$ nimmt das Volumen zu

⇒ ab $z = 4cm$ nimmt das Volumen ab

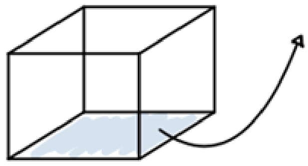
⇒ maximales Volumen bei

$\left.\begin{array}{l} x = 18cm \\ y = 10cm \\ z = 3cm \end{array}\right\} V = 540cm^3$

d) In einer Schachtel sollen 560 Spielwürfel (Volumen= 1 cm · 1 cm · 1 cm) versorgt werden. Welche Masse muss die Schachtel haben, damit alle Spielwürfel darin Platz finden?

1. Ansatz (enaktiv)

die Anzahl Spielwürfel werden zu einem Quader "zusammengebaut"
→ wenn eine geeignete Grundfläche gefunden / ermittelt wurde, kann das Verfahren abgekürzt werden (Quader muss nicht beendet werden)



560 Spielwürfel ≙ $560 cm^3$
→ die Grundfläche muss ein Teiler von $560 cm^3$ sein (lässt sich aus der Volumenformel schliessen)
mögliche Teiler: $10 cm^2$, $20 cm^3$, etc.

2. Ansatz (symbolisch)

560 Spielwürfel ≙ $560 cm^3$
↳ aus der Volumenformel lässt sich ableiten, dass die Höhe, Länge und Breite alles Teiler des Volumens sein müssen

$560 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$ (Teilerzerlegung)
↳ für eine mögliche Lösung können die Teiler neu "zusammengesetzt" werden

Beispiel: $560 cm^3 = 4cm \cdot 4cm \cdot 35cm$
$= 4cm \cdot 2cm \cdot 70cm$
$= 4cm \cdot 10cm \cdot 14cm$
$= 4cm \cdot 20cm \cdot 7cm$
⋮ ⋮ ⋮

dadurch können viele verschiedene Lösungen ermittelt werden

3. Ansatz (auf zuvor gemachte Erkenntnisse & Lösungen zurückgreifen)

bei Aufgabe C beim Erproben wurde diese Lösung ermittelt:

$\underline{z = 7cm}$

$\longrightarrow 7cm = 12cm - \frac{1}{2}x \quad | + \frac{1}{2}x \quad | - 7cm$

$\frac{1}{2}x = 5cm \quad | \cdot 2$

$\underline{x = 10cm}$

$\longrightarrow y = 10cm - 8cm = \underline{2cm}$

$V = 7cm \cdot 10cm \cdot 2cm = \underline{\underline{140cm^3}}$

$\hookrightarrow$ $560cm^3$ ist ein Vielfaches ($140cm^3 \cdot 4$) von $140cm^3$

$\longrightarrow$ daraus folgt $4V = 7cm \cdot 10cm \cdot 2cm \cdot 4 = 560cm^3$

in die Längen "integrieren"

$\hookrightarrow$ mögliche Lösungen: $560cm^3 = \underline{28cm} \cdot 10cm \cdot 2cm$

$= 7cm \cdot \underline{40cm} \cdot 2cm$

$= 7cm \cdot 10cm \cdot \underline{8cm}$

$\longrightarrow$ wenn 4 weiter geteilt wird, sind auch folgende Lösungen möglich:

$560cm^3 = \underline{14cm \cdot 20cm} \cdot 2cm$

$= \underline{14cm} \cdot 10cm \cdot \underline{4cm}$

$= 7cm \cdot \underline{20cm \cdot 2cm}$

Fachlicher Gehalt der Aufgabe: Welche Begriffe werden vorausgesetzt? Welche Begriffsbildungsprozesse können mit der Aufgabe angestossen werden? Inwiefern ist die Aufgabe für den Erwerb von Kompetenzen geeignet?

Für das Lösen der Aufgabe werden folgende Begriffe vorausgesetzt:

- Schachtel → Quader
- Masse
- Volumen
- Quadrat
- (Grund-) Fläche
- Seitenlänge
- Länge
- Breite
- Höhe
- waagrecht / senkrecht

Die Schachtel kann als exemplarisches Beispiel eines Quaders angesehen werden. Eine exemplarische Begriffsbildung kann durch die Einführung der Flächen- und Volumenberechnungen geschehen.

Das Verstehen und anschliessende erfolgreiche Anwenden von Begriffen setzt sich aus unterschiedlichen Wissens- und Könnens-Facetten zusammen. Dabei kann von der expliziten Formulierung hin zu der Konkretisierung, Angrenzung, Bedeutung und der Vernetzung gesprochen werden. Wichtig beim Gebrauch von Begriffen und der Bildungsprozesse dessen ist das Sammeln von Vorerfahrungen, Anknüpfen an Vorwissen, Eigenschaften erkunden, vergleichen und diese bezeichnen.

Wichtig ist, dass mit den oben genannten Begriffen hantiert und operiert werden kann. Dabei sollen Zusammenhänge und Verhältnisse erkannt werden, welche weitere Erkenntnisse garantieren sollen – beispielsweise bezogen auf Längen- und Volumenverhältnisse.

Bereits ab Teilfrage c) kann die Kopfgeometrie als Abstraktion miteinbezogen werden. Dabei wird die Schachtel nicht explizit gefaltet.

Im Fokus liegt hier der Erwerb von Kompetenzen. Für einen solchen Erwerb eignet sich die Aufgabenstellung, da sie kein stures Einüben von Fertigkeiten mit Musterlernen auslöst. Bei der Aufgabe ist die mathematische Bildung zentral. Die Schüler*innen wenden die Mathematik in unterschiedlichen Kontexten (Aufgabenstellungen) an und interpretieren, vergleichen ihre Lösungen. Sie wenden ihr Wissen an, operieren, berechnen, verwenden Werkzeuge, stellen dar, vergleichen, erforschen und explorieren. Dies sind alles Handlungen, welche die Kompetenzen grundlegend erweitern. In der Aufgabenstellung werden Zusammenhänge zwischen den Seitenlängen, Flächen und Volumen gemacht. Diese sollen nicht als isolierte Aufgaben, sondern zusammenhängend betrachtet werden.

Handlungsaspekte LP21:

Operieren und Benennen	Flächen & Volumen anwenden (MA.2.A.1 / MA.2.A.3)
Erforschen und Argumentieren	Operatives Prinzip, Beziehungen Länge, Fläche & Volumen (MA.2.B.1 / MA.2.B.2)
Mathematisieren und Darstellen	Von Schachtel zu Formeln (MA.2.C.1 / MA.2.C.2)

Autor*innen

Dieses Material wurde im Rahmen eines Moduls «Kompetenzorientierung im Mathematikunterricht» von Adriana Walker, Fabienne Fässler und Julia Dummermuth an der PH Luzern erstellt.