Jirakit Lüthold & Vanessa Büchel

Problemlöse-Aufgabe «Schiffsbeladung»

Mit dieser Problemlöseaufgabe soll den Lernenden gemäss den Kriterien Offenheit, Authentizität und Differenzierungsvermögen von Holzäpfel et al. (2018) die Möglichkeit geboten werden kompetenzorientiert Mathematikunterricht zu betreiben.


Containerschiff – flickr CC0)

Schiffsbeladung

Infobox – Beladung eines Schiffes:

Länge: 400 Meter

Breite: 62.5 Meter

Höhe: 76 Meter

Container auf einem Schiff haben stets die Länge von 12 Meter und einer Breite von 2.5 Meter. Die Tiefe kann jedoch immer wieder Variieren.

Aufgabenstellung:

Die Aufgabe sollte so gelöst werden, dass es realistisch ist, mit diesen Massen Objekte nach Übersee zu transportieren.

a) Wie hoch würdest du die Container gestalten, damit möglichst viele Container auf ein Schiff geladen werden können?
b) Wie viele Container wären das laut den Berechnungen von Aufgabe a)?
c) Wie viele iPhones könnten auf deinem Schiff transportiert werden, wenn man davon ausgeht, dass ein iPhone das Volumen von 138 cm^3 hat?

Weiterdenk-Aufgabe:

d) Stell dir vor, es wären nicht nur quadratische Container, sondern andersförmige Container (Quadrat, Trapez, etc.). Wie gross könnten diese sein und würde dies die Menge der Beladung verändern?

Recherchier-Aufgabe:

Suche dir die Masse eines beliebigen Autos heraus und schreibe diese auf. Versuche anhand von den gegebenen Angaben mit Hilfe von Umrechnungen die folgende Aufgabe zu lösen.

e) Welche Masse müsste der Container haben, um mindestens zwei der Autos nach Übersee transportieren zu können?

Begründung der «guten» Problemlöseaufgabe mit den Kriterien von Holzäpfeln et al. (2018) (Differenzierungsvermögen, Offenheit, Authentizität)

Offenheit

Die Aufgabe war zuvor sehr darauf ausgelegt, ein exaktes Ziel durch vermehrte Umrechnungen zu erreichen.
Bei den Teilaufgaben a) und b), handelt es sich um Probleme mit bekanntem Ziel. Vorwegzunehmen ist jedoch, dass die meisten einen ähnlichen Ansatz wählen werden (via Volumenberechnungen). Die Aufgabe c) ist eine geschlossene Aufgabe, welche sich auf die zuvor vertieften Inhalte von Volumenberechnen stützt.
Bei der Teilaufgabe e) und f), handelt es sich hingegen um ein Open-end-Problem. Da diese Berechnungen stark von den Ideen und Recherchen der Lernenden abhängig sind. Abhängig von der Form und deren Masse, die die Lernenden wählen, können die Resultate sehr unterschiedlich sein und somit eine interessante Diskussion in den Klassen auslösen. Suchen die Lernenden nach dem Durchschnittsauto, so werden sie Masse von 4,5 Meter erhalten. Suchen sie hingegen nach einem sehr spezifischen Auto, können diese Resultate variieren, auch kann es sein, dass Lernende sich entscheiden, ein Auto ausmessen zu gehen oder die Masse zu schätzen. Daher haben die Lernenden hier die Möglichkeit, das Ziel auf eigenen Weg zu erforschen und so zu einer Lösung zu kommen, da man den Lernenden Informationen nicht direkt zugänglich macht.

Differenzierung

Die vorliegende Aufgabe war zuvor eine gestufte Aufgabe. Das bedeutet, dass es sich grundsätzlich immer um denselben Aufgabentyp handelt, jedoch werden unterschiedliche Start- und Endpunkte in gestufter Form gewählt. Dabei geht es immer um die Berechnung von Volumen und den damit verbundenen Massen. Allerdings werden jedes Mal neue Startpunkte ausgewählt, die auch den Endpunkt je nach Aufgabe beeinflussen können. Dies dient dazu, dass die Lernenden sich erneut mit den Begriffen vertraut machen, die sie aus der Primarschule kennen sollten, und diese eigenständig anwenden. Durch die Stufung der Aufgaben erhält die Lehrperson die Möglichkeit, schwächeren Lernenden Unterstützung bei der Lösung einer Aufgabe zu bieten, bevor sie die Lernenden dazu befähigt, eigenständig zu lernen.

Authentizität

Authentische Matheaufgaben sind Aufgaben, die in einem realen Kontext oder einer authentischen Situation auftreten. Sie sind darauf ausgerichtet, mathematische Konzepte und Fähigkeiten auf praktische Probleme anzuwenden, die ausserhalb des reinen mathematischen Unterrichts auftreten können. Authentische Matheaufgaben ermöglichen es den Schülern, mathematische Konzepte besser zu verstehen und ihre Anwendbarkeit in der realen Welt zu erkennen. Diese Aufgabe lässt sich bestimmt als authentische Aufgabe bezeichnen, da sie sich im Allgemeinen nahe an der Lebenswelt der Lernenden befindet. Die meisten Lernenden werden schon mit der Thematik konfrontiert worden sein, dass Handys und Autos via Schiff, nach Europa verschifft werden. Daher macht die Fragestellung Sinn, um ihnen auch zu verdeutlichen, wie viel/wenig je nachdem mit einem Schiff transportiert werden kann. In diesem Zusammenhang macht es auch Sinn mit den Lernenden diese Thematik weiterführend zu betrachten, zum Beispiel in Zusammenhang mit weiteren Masseinheiten. Selbstverständlich muss in diesem Zusammenhang auch klargestellt werden, dass es kein Frachtschiff gibt, welches ausschliesslich mit einer Ware quer um die Welt fährt.

Lösungsansätze auf mind. 3 Niveaus mit Kennzeichnung der Heurismen

Niveau 1

a) Wie hoch würdest du die Container gestalten, damit möglichst viele Container auf ein Schiff geladen werden können?

Höhe Schiff: 76 Meter	
Breite Schiff: 62.5 Meter	Breite Container: 2.5 Meter
Länge Schiff: 400 Meter	Länge Container: 12 Meter

Individuelle Lösung anhand der Begründung der Lernenden

Lösungsidee 1

12 m x 2.5 m = **<u>30 m^2</u>**

30 m^2 : 76 m = **<u>2.53 m</u>**

Durch das Berechnen der Fläche des Containers und dem in Zusammenhang stellen mit der Höhe des Schiffes kann eine sinnvolle Lösung hergeleitet werden.

Lösungsidee 2

76 m : 2 m = **38 Container**

Mit 2 Meter können am meisten Container aufeinandergestapelt werden und die ganze Höhe des Schiffes ausgenutzt werden.

Lösungsidee 3

76 m : 10 = 7.6 m -> ist nicht realistisch 7.6 Meter in der Höhe mit Gütern zu füllen

7.6 m : 2 = 3.8 m -> **3.8 Meter** ist eine Sinnvolle Lösung und gibt die Möglichkeit das Schiff in der Höhe voll zu füllen

Das Schiff ist 76 Meter hoch, um das Schiff sinnvoll aufzuteilen würde ich die Container 3.8 Meter hoch gestalten, so passen in der Höhe genau 20 drauf. Diese können maximal gestapelt werden.

b) Wie viele Container wären, dass laut den Berechnungen von Aufgabe a)?

Individuelle Lösung anhand von Begründung der Lernenden, hier mit Lösung von Lösung 1.

Maximales Volumen Container	Maximales Volumen Schiff
12 m x 2.5 m x 2.53 m = 60.8 m^3	76 m x 62.5 m x 400 m =1'900'000m^3 = 0.0019 km^3

1'900'000 m^3 : 60.8 m^3 = **31'250 Container**

c) Wie viele iPhones könnten auf deinem Schiff transportiert werden, wenn man davon ausgeht, dass ein iPhone das Volumen von 138 cm3 hat.

Individuelle Lösung anhand von Begründung der Lernenden, hier mit Lösung von Lösung 1.

Volumen iPhone = 138 cm^3 = 0,000138 m^3

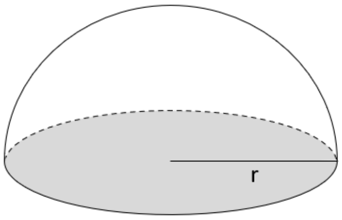
60.8 m^3 : 0,000138 m^3 = 440'579.71 iPhones pro Container

440'579.71 · 31'250 Container = 13'768'115'937.5 iPhones pro Schiff

d)

Individuelle Lösung abhängig von der Gewählten Form.

Lösung für Halbkreissphären (Halbkugeln)



Wenn man davon ausgeht, dass die ursprüngliche Breite des Containers dem Radius der Sphäre entspricht, dann würde die Rechnung wie folgt aussehen um den Platz von 1'900'000 m^3 zu füllen:

Volumen

$$V = \frac{1}{2} V_K$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$$
$$= \frac{2}{3} \pi r^3$$

$\frac{2}{3}$ x π x 2.5m^3 = 32.69 m^3

1'900'000 m^3 : 32.69m^3 = **<u>58'121.74 Halbsphären</u>**

Auf dem Schiff hätten 58'121.74 Halbsphären Platz.

e)

Individuelle Lösung.

Standard Grösse PKW:

Höhe: 1.5 Meter

Breite: 1.8 Meter

Länge: 4.5 Meter

Standard Grösse Pick-Up Truck:

Höhe: 2 Meter

Breite: 1.9 Meter

Länge: 5.6 Meter

Volumen PKW:

1.5m x 1.8m x 4.5m = 12.15 m^3

Volumen Pick-up Truck:

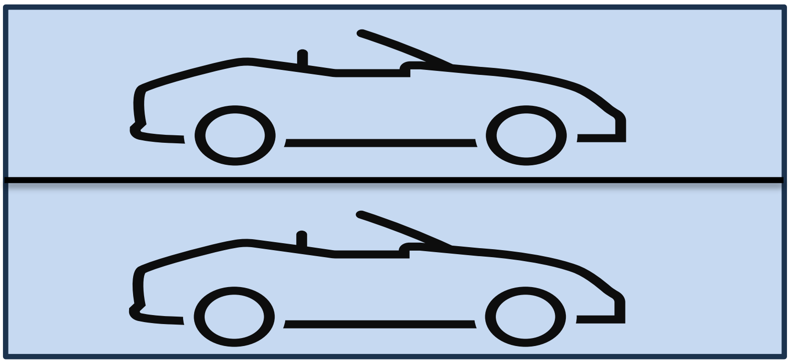
2m x 1.9m x 5.6m = 21.28 m^3

Durchschnitt der beiden

12.15 m^3 + 21.28 m^3 = 33.43 m^3

33.43 m^3 : 2 = 16.715m^3

16.715m^3 x 2 =33.43m^3



Nicht alle Autos sind gleich gross geht man von einem sehr grossen und einem Standardauto aus so hat man die Wahrscheinlichste Lösung.

Somit muss der Container ein min. Volumen von 33.43m^3 haben.

Niveau 2

a) Wie hoch würdest du die Container gestalten, damit möglichst viele Container auf ein Schiff geladen werden können?

Höhe Schiff : 76 Meter

Breite Schiff: 62.5 Meter

Länge Schiff: 400 Meter

Breite Container: 2.5 Meter

Länge Container: 12 Meter

Individuelle Lösung anhand von Begründung der Lernenden

Lösungsidee 1

76 m : 2 m = 38 Container

Mit 2 Meter können am meisten Container aufeinandergestapelt werden und die ganze Höhe des Schiffes ausgenutzt werden.

Lösungsidee 2

76 m : 10 = 7.6 m -> ist nicht realistisch 7.6 Meter in der Höhe mit Gütern zu füllen

7.6 m : 2 = 3.8 m -> **3.8 Meter** ist eine Sinnvolle Lösung und gibt die Möglichkeit das Schiff in der Höhe voll zu füllen

Das Schiff ist 76 Meter hoch, um das Schiff sinnvoll aufzuteilen würde ich die Container 3.8 Meter hoch gestalten so passen in der Höhe genau 20 drauf. Damit das Schiff maximal gestapelt werden kann.

b) Wie viele Container wären das laut den Berechnungen von Aufgabe a) ?

Individuelle Lösung anhand von Begründung der Lernenden, hier mit Lösung von Lösung1

Maximales Volumen Container

$12\ m \cdot 2.5\ m \cdot 2\ m = 60\ m^3$

Maximales Volumen Schiff

$76\ m \cdot 62.5\ m \cdot 400\ m = 1'900'000 m^3 = 0.0019\ km^3$

$1'900'000\ m^3 : 60\ m^3 =$ 31'666.66 Container

c) Wie viele iPhones könnten auf deinem Schiff transportiert werden, wenn man davon ausgeht, dass ein iPhone das Volumen von 138 cm^3 hat.

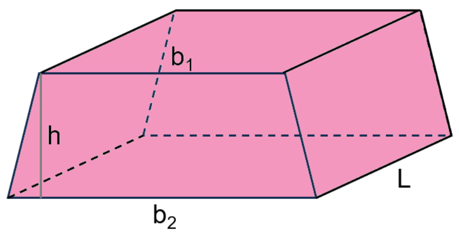
Individuelle Lösung anhand von Begründung der Lernenden, hier mit Lösung von Lösung1

Volumen IPhone = 138 cm^3 = 0,000138 m^3

60 m^3 : 0,000138 m^3 = 434'782.608 IPhones pro Container

434'782.608 · 31'666.66 Container = 13'768'115'630.14493 IPhones pro Schiff

d) Trapez



L: 12 Meter

b1: 1.5 Meter

b2: 2.5 Meter

H: 2 Meter

$Volumen = \frac{1}{2}\,(b_1 + b_2) \cdot h \cdot L$ $\quad \frac{1}{2}$ (1.5 m+2.5m) · 2m · 12m = 48m^3

1'900'000 m^3 : 48m^3 =<u>39'583.333 Container</u>

Auf dem Schiff hätten 39'583.333 Container in Trapezform Platz.

e)

Individuelle Lösung.

Tesla Model S

Höhe 1.4 Meter Breite: 1.9 Meter Länge: 5 Meter

Volumen Tesla:

1.4 m · 1.9m · 5m = 13.3m^3

13.3m^3 · 2 = <u>26.6 m^3</u>

Der Container muss ein min. Volumen von 26.6 m^3 haben.

Niveau 3

a) Wie hoch würdest du die Container gestalten, damit möglichst viele Container auf ein Schiff geladen werden können?

Containerschiff – flickr CC0)

Höhe Schiff : 76 Meter

Breite Schiff: 62.5 Meter

Länge Schiff: 400 Meter

Breite Container: 2.5 Meter

Länge Container: 12 Meter

Lösungsidee 1

Individuelle Lösung anhand von Begründung der Lernenden

76 m : 10 = 7.6 m -> ist nicht realistisch 7.6 Meter in der Höhe mit Gütern zu füllen

7.6 m : 2 = 3.8 m -> **3.8 Meter** ist eine Sinnvolle Lösung und gibt die Möglichkeit das Schiff in der Höhe voll zu füllen

Das Schiff ist 76 Meter hoch, um das Schiff sinnvoll aufzuteilen würde ich die Container 3.8 Meter hoch gestalten so passen in der Höhe genau 20 drauf. Damit das Schiff maximal gestapelt werden kann.

b) Wie viele Container wären, dass laut den Berechnungen von Aufgabe a) ?

Individuelle Lösung anhand von Begründung der Lernenden, hier mit Lösung von Lösung1

Maximales Volumen Container

$12 \text{ m} \cdot 2.5 \text{ m} \cdot 3.8 \text{ m} = 114 \text{ m}^3$

Maximales Volumen Schiff

$76 \text{ m} \cdot 62.5 \text{ m} \cdot 400 \text{ m} = 1'900'000 \text{m}^3 = 0.0019 \text{ km}^3$

$1'900'000 \text{ m}^3 : 114 \text{ m}^3 =$ 16'666.66 Container

c) Wie viele iPhones könnten auf deinem Schiff transportiert werden, wenn man davon ausgeht, dass ein iPhone das Volumen von 138 cm^3 hat.

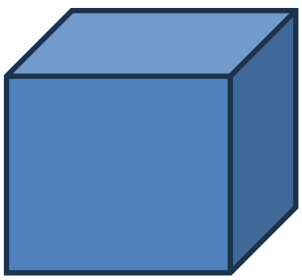
Individuelle Lösung anhand von Begründung der Lernenden, hier mit Lösung von Lösung 1.

Volumen IPhone = 138 cm^3 = 0,000138 m^3

144 m^3 : 0,000138 m^3 = 1'043'478.26 IPhones pro Container

434'782.608 · 16'666.66 Container = <u>7'246'373'901.449 IPhones pro Schiff</u>

d) Angenommen die Breite des Ursprünglichen Containers bleibt beibehalten, dann entsprich die



Breite des Würfel 2.5 Meter.

2.5m · 2.5m · 2.5m = 15.625 m^3

1'900'000 m^3 : 15.625m^3 = 121'600 Container

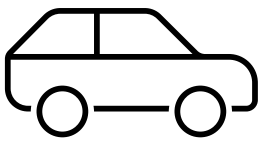
Formel Würfel:

Volumen = Breite · Breite · Breite

e)

Individuelle Lösung.

Standard PKW Masse:



Höhe: 1.5 Meter

Breite: 1.8 Meter

Länge: 4.5 Meter

Volumen Auto: 1.5m · 1.8m · 4.5m = 12.15 m^3

12.15 m^3 · 2 = <u>24.30m^3</u>

Fachlicher Gehalt der Aufgabe: Welche Begriffe werden vorausgesetzt? Welche Begriffsbildungsprozesse können mit der Aufgabe angestossen werden? Inwiefern ist die Aufgabe für den Erwerb von Kompetenzen geeignet?

Bei der vorliegenden Aufgabe werden die Lernenden mit der Begriffsbedeutung konfrontiert und müssen das Vorwissen über Flächen und Volumen abrufen. Hierbei ist es von zentraler Bedeutung, dass die Lernenden Zeit bekommen Begriffe wie Fläche, Volumen, Seite, Tiefe oder auch Masseinheiten wie Kubik «wieder kennenzulernen», obschon diese aus der Primarstufe und vorher gehenden Themen bekannt sein sollten. Dabei werden hier primär charakteristische Definitionen verwendet.
Durch das Berechnen des Volumens von Containern ist es möglich, einen nahtlosen Übergang zum Thema Schiffstransport und somit zu den internationalen Masseinheiten (Fuß, Inch, Pfund, etc.) herzustellen. Auf diese Weise könnte man in einem nächsten Schritt eine Verbindung zwischen neuen Themen und bereits bekannten herstellen sowie auch überfachliches Wissen stärken oder eine Brücke zum Fach RZG schlagen.

Die Aufgabe eignet sich für den Kompetenzbereich «Operieren und Bennen», konkret jedoch Erkennen und Abrufen von (Vor-)Wissen in Zusammenhang mit dem Erforschen und Explorieren von Wissen im Kompetenzbereich von Form und Raum sowie Grösse und Masse. Dadurch, dass die Resultate jedoch unterschiedlich ausfallen könnten.

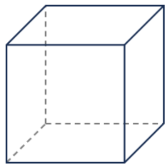
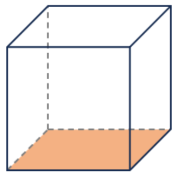
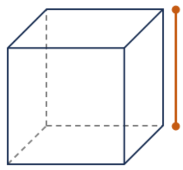
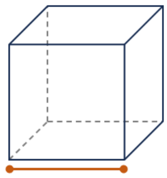
Die folgende Aufgabe lässt sich nach dem Lehrplan 21 in folgende Kompetenzen einbetten:

MA 2A.3 Die Schülerinnen und Schüler können Längen, Flächen und Volumen bestimmen und berechnen.

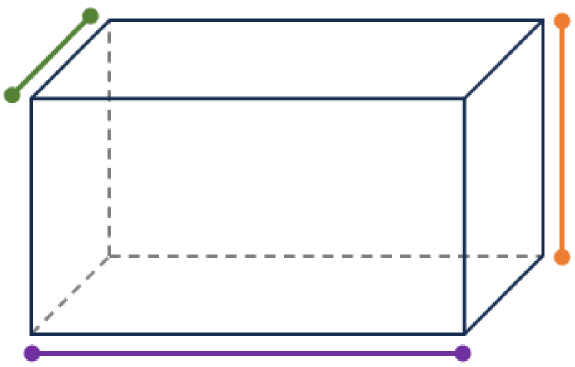
MA 3. A.2 Die Schülerinnen und Schüler können Grössen, umwandeln, runden und mit ihnen rechnen.

MA 3B.1 Die Schülerinnen und Schüler können zu Grössenbeziehungen und funktionalen Zusammenhängen Fragen formulieren, diese erforschen sowie Ergebnisse überprüfen und begründen.

Folgende Begriffe erachten wir als zentral und sollten zuvor mit den Lernenden besprochen werden:

Begriff	**Beschreibung (Verbal)**	**Darstellung Ikonisch/ Beispiele**
Volumen	Masseinheit in Kubik (^{3}), beschreibt den dreidimensionalen Raum eines Objektes	
Grundfläche	Beschreibt die Fläche eines Objektes auf der es aufliegt/ welche das Objekt begrenzt.	
Höhe	Beschreibt die vertikale Tiefe des Objektes.	
Breite	Beschreibt die horizontale Tiefe des Objektes.	
Körper	Beschreibt einen geometrischen Körper.	Zylinder, Quader, Kugel, Pyramide, etc.
Inch	Beschreibt im imperialen System die Länge von 2.54 cm.	'' = Kürzel für Inch 1'' = 2.54 cm
Fuss	Beschreibt im imperialen System die Länge von 30.48 cm	' = Kürzel für Fuss 1' = 30.48 cm

Berechnungsskizze:



Höhe · Breite ·Länge = Volumen

Volumenangaben = Masseinheit ^{3}

Autor/innen

Dieses Material wurde im Rahmen eines Moduls Kompetenzorientierung im Mathematikunterricht von Jirakit Lüthold & Vanessa Büchel an der PH-Luzern erstellt.