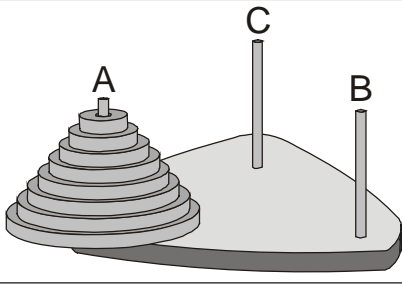
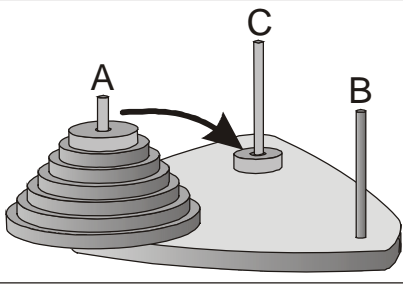
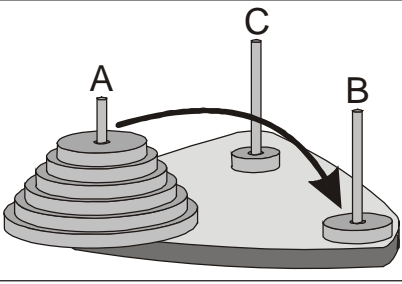
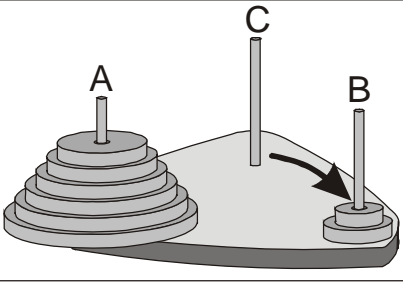
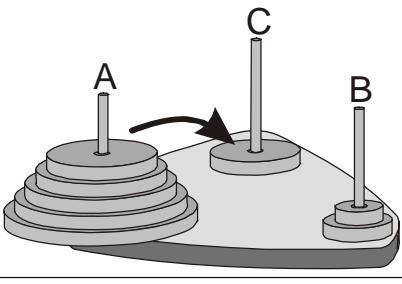
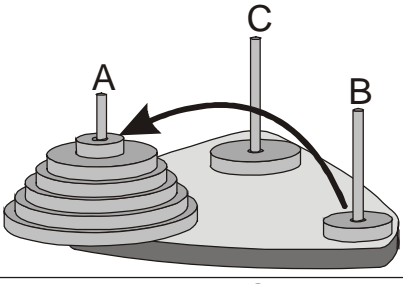
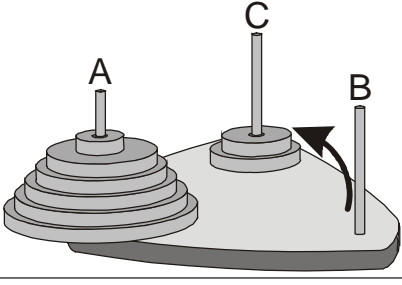
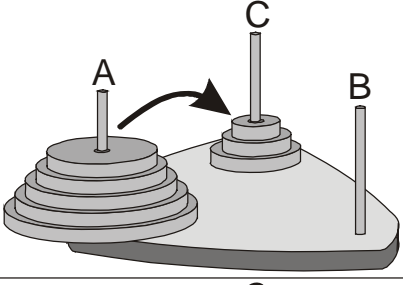
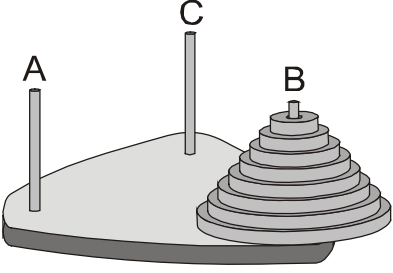


Der Turm von Hanoi

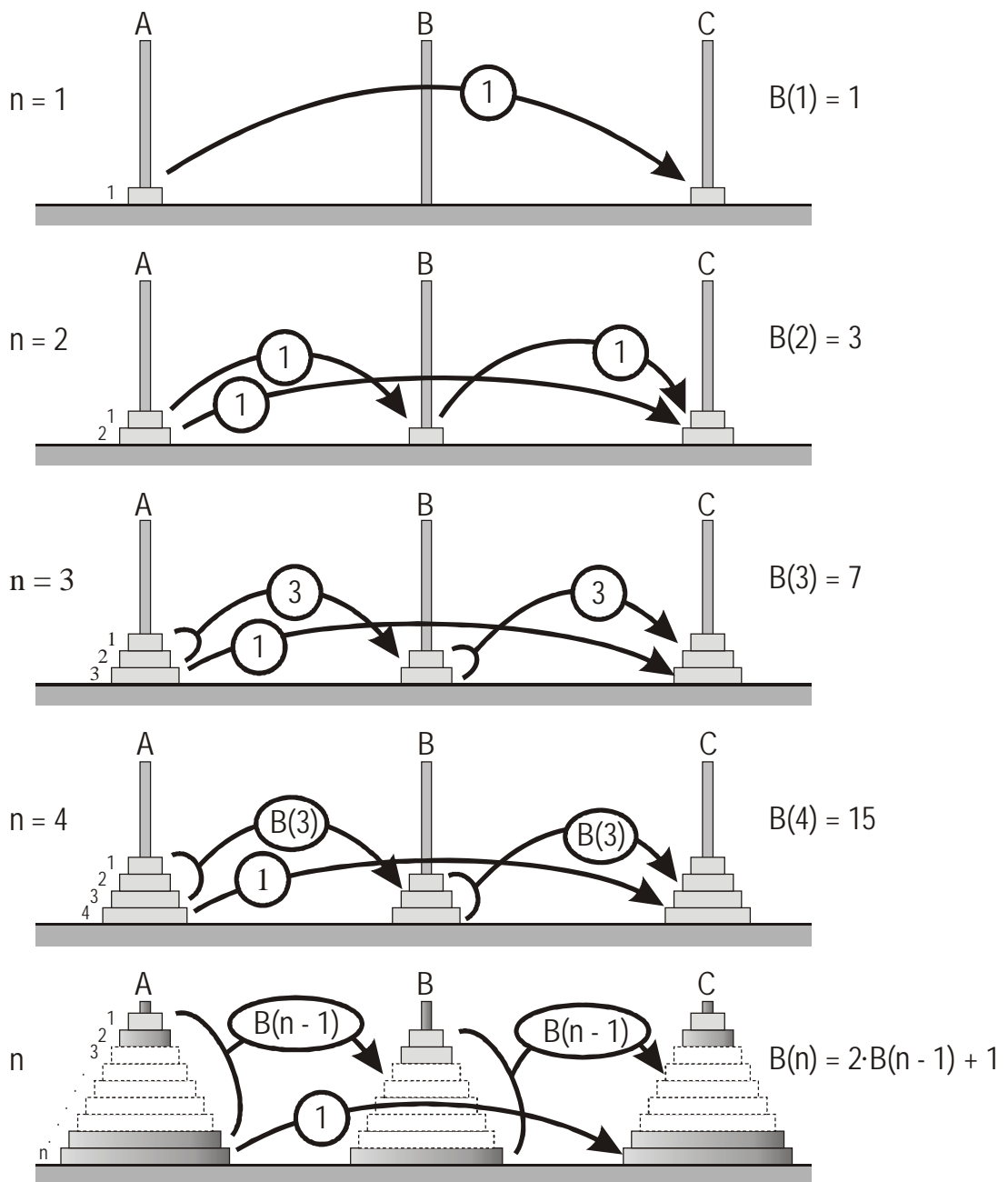
von Dieter Ortner

Eine alte fernöstliche Legende berichtet dies vom «Turm von Hanoi»:

In einem Tempel befinden sich drei Säulen: Zwei aus Silber und eine aus Gold. Um eine der silbernen Säulen soll der Weltgeist selbst einen Turm von hundert in der Mitte durchbohrten Alabasterscheiben errichtet haben, in abnehmender Grösse, vom Boden aufwärts geordnet. Jeder Gläubige, der den Tempel betritt, darf eine Scheibe von einer Säule auf eine andere umsetzen. Dabei darf aber niemals eine grössere Scheibe auf eine kleinere gelegt werden. So veränderte sich im Laufe der Zeit die Lage der Scheiben. Wenn dann auf diese Weise alle hundert Alabasterscheiben um die goldene Scheibe geordnet sein werden, dann ist das Ende der Welt gekommen.

<p>①</p> 	<p>②</p> 
<p>③</p> 	<p>④</p> 
<p>⑤</p> 	<p>⑥</p> 
<p>⑦</p> 	<p>⑧</p> 
<p>Die Aufgabe besteht darin, die 8 Scheiben der Stange A auf die Stange B zu verlagern und zwar unter folgenden zwei Spielregeln:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Es darf immer nur eine Scheibe bewegt werden. 2. Es darf nie eine grössere Scheibe über eine kleinere Scheibe gelegt werden. <p>Frage: Wie viele Bewegungen sind notwendig, um einen Turm von 8 Scheiben von der Stange A auf die Stange B umzubiegen?</p>	<p>⑨</p> 

D. O. 95



Für eine Scheibe braucht es natürlich nur eine Bewegung.

Für zwei Scheiben braucht es drei Bewegungen.

Für drei Scheiben braucht es sieben Bewegungen.

Für vier Scheiben braucht es 15 Bewegungen.

Für fünf Scheiben braucht es 31 Bewegungen.

$$B(1) = 1$$

$$B(2) = 3$$

$$B(3) = B(2) + 1 + B(2) = 7$$

$$B(4) = B(3) + 1 + B(3) = 15$$

$$B(5) = B(4) + 1 + B(4) = 31$$

Die Anzahl Bewegungen für n Scheiben lassen sich aus der Anzahl Bewegungen von $n - 1$ Scheiben berechnen:

$$B(n) = B(n - 1) + 1 + B(n - 1) = 2 \cdot B(n - 1) + 1$$

$$B(1) = 1; B(2) = 2 \cdot B(1) + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3; B(3) = 2 \cdot B(2) + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7; B(4) = 2 \cdot B(3) + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15 \text{ usw.}$$

Wann ist also gemäss der fernöstlichen Legende das Ende der Welt zu erwarten? Na ja, für $n = 100$ braucht es etwa $1.27 \cdot 10^{30}$ Bewegungen. Wenn täglich 1000 Gläubige den Tempel besuchen, dann sind es immerhin noch $1.27 \cdot 10^{27}$ Tage bis dahin oder $3.47 \cdot 10^{24}$ Jahre. Physiker geben unserer Erde «nur» noch eine Lebenszeit von $5 \cdot 10^9$ Jahren.