## Einleitung

Computerunterstützter Mathematikunterricht ist bei vielen Lehrpersonen ein rotes Tuch. Häufig deshalb, weil sie ihn sich selber nicht zutrauen, das Schulhaus eine schlechte Infrastruktur (nur wenige Computer) aufweist oder sie finden, der Einarbeitungsaufwand für sich und die Lernenden sei zu gross, als das er sich lohnen würde.

Literatur und Lehrmittel zum Computereinsatz sind mittlerweile vorhanden (für das mathbuch z.B. „Impulse zum Computereinsatz“, Schulverlag Bern und Klett Verlag), einige Lehrpersonen empfinden aber solche umfassenden Werke als erschlagend und verbinden damit eine hohe Einarbeitungszeit ihrer- und schülerseits.

Diese Unterrichtseinheit soll eine Brücke schlagen. Ganz bewusst ist sie so gestaltet, dass man mit ihr mit kleinstem Aufwand unter schwierigen Bedingungen (erste) Erfahrungen im computerunterstützten Mathematikunterricht sammeln kann.

Es würde mich freuen, wenn dadurch viele neue Lehrpersonen zu diesem interessanten Gebiet stossen würden. Gerne nehme ich auch Rückmeldungen und Fragen entgegen.

Martin Lacher, fuechsl@gmx.ch

## Ziele

1. Rahmenbedingungen

Die Unterrichtseinheit kann durchgeführt werden

* 1. durch Lehrpersonen, die lediglich über grundlegenden Informatikkenntnissen verfügen.
	2. mit Lernenden aller Niveaustufen ohne Besitz von Informatikkenntnissen.
	3. mit rudimentärer Infrastruktur (2 Computer).
1. Der Unterricht soll bei den Lernenden
	1. Freude an der Arbeit mit dem Computer bewirken.
	2. Neue Einsichten in mathematische Zusammenhänge ermöglichen.
	3. Kreative Auseinandersetzung mit Mathematik auslösen.
2. Der Unterricht soll bei der Lehrperson
	1. Freude am Einsatz des Computers bewirken.
	2. Einen angstfreien Einstieg in computerunterstützten Mathematikunterricht ermöglichen.
	3. Die Möglichkeiten (und evtl. Grenzen) des Mediums Computer im Mathematikunterricht aufzeigen.

## Auswahl der Lerneinheit

### Anforderungen an die Lerneinheit

Die Lerneinheit soll

1. die oben deklarierten Ziele erfüllen.
2. möglichst vielen Lehrpersonen offen stehen, d.h. möglichst im Lehrplan aller Kantone verankert sein.
3. inhaltlich einfach sein.
4. kompakt, aber erweiterbar sein (möglichst selbstdifferenzierend).
5. (en-)aktiv entdeckendes Lernen fördern.
6. eher zu Beginn der Sekundarstufe 1 angesiedelt sein (damit Fortsetzungen möglich sind).
7. auf einfachen, kostenfreien oder standardmässig installierten Werkzeugen basieren.

Die Auswahl der Lerneinheit ergibt sich aus den obigen Punkten. Punkt g) schränkt die Wahl auf eine Tabellenkalkulation wie Excel (standardmässig fast immer installiert) oder OpenOffice Calc (frei verfügbar), eine dynamische Geometrie-Software (DGS, frei verfügbar z.B. GeoGebra) oder im Internet frei verfügbare Applets (wie z.B. auf [www.matlet.ch](http://www.matlet.ch)) ein.

Da erfahrungsgemäss optische Reize höhere Motivation sowohl bei Lernenden wie auch bei Lehrpersonen versprechen und Tabellenkalkulationen eher abstrakte Denkweise benötigen, fällt die Tabellenkalkulation als motivierendes Einstiegswerkzeug eher weg. Und da die Lernumgebung hohe Eigenaktivität fördern und erweiterbar sein soll, empfehlen sich auch fest „verdrahtete“ Applets zu eingeschränkten Themen weniger.

Damit fällt die Auswahl des Werkzeugs auf eine DGS, durch die einfache Umsetzung und Installation sowie die freie Verfügbarkeit verwende ich GeoGebra ([www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)).

Die Werkzeugauswahl schränkt uns damit fast automatisch auf das Gebiet Geometrie ein, das sich vor allem zu Beginn der Sekundarstufe 1 auch durch seine inhaltliche Einfachheit anbietet.

Berücksichtigen wir die Anforderung f) bei der konkreten Themenauswahl, so stehen zwei interessante Themen zur Wahl, die wohl in allen Lehrplänen (Punkt b) ziemlich an Anfang stehen: Kongruenzabbildungen (Achsen- und Punktspiegelung, evtl. Verschiebung und Rotation) oder Vierecke und deren Eigenschaften.

Das zweite Thema bietet meines Erachtens im Bereich Erweiterbarkeit und Selbstdifferenzierung grössere Möglichkeiten, weswegen es in dieser Lerneinheit verwendet wird.

## Sach- und didaktische Analyse

### Sachanalyse

#### Systematik der Vierecke

Die Vierecke lassen sich anhand ihrer Eigenschaften in folgende Systematik einteilen:

Allgemeines Viereck

Drachenviereck

Trapez

Parallelogramm

Rhombus

Rechteck

Quadrat

* *Zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel*
* *Je zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel*
* *Diagonalen halbieren sich gegenseitig*

*Zusätzlich:*

* *Alle Winkel betragen 90°*

*Keine neuen Eigenschaften, sondern Kombination aus Rhombus und Rechteck:*

* *Alle Seiten sind gleich lang*
* *Alle Winkel betragen 90°*
* *Zwei benachbarte Seiten sind gleich lang*
* *Diagonalen schneiden sich rechtwinklig*

*Zusätzlich:*

* *Alle Seiten sind gleich lang*
* *Je zwei benachbarte Seiten sind gleich lang*
* *Diagonalen schneiden sich rechtwinklig*

*Zusätzlich:*

* *Alle Seiten sind gleich lang*

#### Umkreis und Inkreis

Nicht alle Vierecke besitzen einen Umkreis und einen Inkreis. Lediglich beim Rechtecke ist der Umkreis eindeutig definiert, beim Rhombus der Inkreis (Womit das Quadrat als einziges Viereck immer beide Kreise besitzt). Es gibt jedoch bei allen anderen Viereckarten immer Spezialfälle, die nicht Rechteck oder Rhombus sind, und einen Umkreis oder einen Inkreis besitzen.

#### Bemerkung

Ganz bewusst schränkt sich die Lernumgebung auf Eigenschaften von Vierecken ein. Elemente wie Flächenberechnungen und Konstruktionen der Figuren werden deshalb in der Sachanalyse ebenfalls weggelassen.

### Didaktische Analyse

#### Einsatz des Computers im Unterricht

Als der Computer in die Schulzimmer Einzug hielt, machte sich grosse Euphorie breit. Mit Lernprogrammen sollte der Unterricht so gestaltet werden, dass die Lehrperson stark entlastet (bis ganz überflüssig) würde. Der Markt wurde in der Folge geradezu überschwemmt mit tutoriellen Lernsystemen, meist medial wunderschön, didaktisch aber fragwürdig gestaltet. Schnell hat es sich dann auch gezeigt, dass eine ausgebildete Lehrperson nicht so und einfach durch die „künstliche Intelligenz“ des Computers ersetzt werden kann, die bereits bei einfachen Lernbeurteilungsaufgaben (weshalb hat der Schüler nun diesen Rechnungsfehler gemacht?) meist komplett versagt.

Damit stellte sich erneut die Gretchenfrage: Wofür soll der Computer in der Schule eingesetzt werden?

Unter der Prämisse, dass der Computer ein Werkzeug wie andere auch ist, ergeben sich zwei wesentlich Einsatzkriterien:

1. Die eingesetzten Programme sollen einfach und kostengünstig (im besten Fall gratis) sein.
2. Der Einsatz des Computers bringt einen Mehrwert. Das heisst, einen Wert, der ohne seinen Einsatz nicht zu erreichen wäre.

Die Werkzeugfrage haben wir eingangs bereits entschieden. GeoGebra ist gratis erhältlich und in den Grundwerkzeugen sehr intuitiv zu bedienen. Zudem bietet es die Möglichkeit, Werkzeuge auszublenden und damit die Bedienung noch einfach zu gestalten.

Der Mehrwert hängt davon ab, wie wir das Programm einsetzen. Benutzen wir es lediglich als Ersatz der klassischen Konstruktionswerkzeuge, bringt es keinen Mehrwert. Die grosse Stärke der DGS liegt darin, Konstruktionen in Echtzeit nachzuzeichnen und so dynamische Erkenntnisprozesse zu ermöglichen.

Der Schlüssel des Einsatzes liegt also darin, Aufgaben zu entwickeln, in denen sich durch dynamische Prozesse (verschieben von Punkten einer Konstruktion) Erkenntnisse gewinnen lassen, die durch statische Konstruktionen oft nur viel schwieriger (weil abstrakter) zu gewinnen wären. Besonders ergiebig sind in dieser Hinsicht so genannte Blackbox-Aufgaben, also Aufgaben, deren innerer Mechanismus verborgen ist und es zu ergründen gilt.

#### Mathematische und informatorische Voraussetzungen

Die Einfachheit des Computereinsatzes schliesst auch die Frage nach Voraussetzungen ein. Ideal ist es, wenn die Aufgaben und Programme seitens der Lernenden keine informatorischen und keine oder geringe mathematische Kenntnisse voraussetzt. Beides ist durch die hier verwendete Themenwahl gegeben.

#### Unterrichtsmethodik

Viele Schulhäuser besitzen gut ausgerüstete Informatikräume oder Laptopsätze, mit denen in ganzer Klassengrösse unterrichtet werden kann. Die Frage der Methodik stellt sich dann nicht besonders, es gelten die üblichen allgemein- oder fachdidaktischen Grundsätze.

Verfügt man jedoch nur über wenige Computer, müssen computerunterstützte Aufgaben weitere Bedingungen erfüllen:

* Sie sind weitgehend ohne Aussenhilfe lösbar.
* Sie benötigen wenig Bearbeitungszeit (damit möglichst viele Lernende in kurzer Zeit daran arbeiten können).
* Sie können in ein Thema so eingeordnet werden, dass nicht andere Arbeiten davon abhängen (und damit gezwungenermassen Warteschlangen entstehen würden).
* Sie ermöglichen Bearbeitung in Gruppen.

Der konkrete Einsatz kann individuell (integriert in Werkstatt- oder Planarbeit) oder in Gruppen geschehen, wobei sich kleine Gruppengrössen (höchstens drei, allenfalls vier Personen) empfehlen. Wenn in Gruppen gearbeitet wird, ist häufig die Methode „Gruppenpuzzle“ gut geeignet, um über Ergebnisse und Lösungswege zu diskutieren. Konkret erarbeiten sich dabei (Experten-)Gruppen Lösungen, die sie dann in anderen Gruppen (quer durchmischt!) sich gegenseitig vorstellen und besprechen, bevor man im Plenum auf die Ergebnisse eingeht und sie weiterverarbeitet.

#### Produkt und Beurteilung

Die Produkte, die bei der Arbeit am Computer entstehen, eignen sich gut für ein Portfolio, allenfalls sogar ein digitales. Natürlich lassen sie sich in diesem Rahmen auch beurteilen und eignen sich besonders für erweiterte oder alternative (notenlose) Beurteilungskonzepte.

## Konkreter Aufbau der Lerneinheit

Die Lerneinheit wird hier inkl. Lehrerkommentar aufgebaut. Für die Bearbeitung durch die Lernenden kopiert man die eigentlichen Aufträge heraus und passt sie allenfalls an die eigenen (methodisch gesteuerten) Bedürfnisse an.

### Methodischer Vorkommentar

Es empfiehlt sich, die Lernenden über ihre Erkenntnisse schriftlich Protokoll führen zu lassen. Dieses Protokoll kann auch Teil einer Beurteilung werden.

### Vorbereitung

Aus dem Internet ([www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)) lädt die Lehrperson GeoGebra herunter (Menüpunkt Download) und installiert es. Es ist auch denkbar, die Lernenden anzuweisen, GeoGebra per Webstart (direkt vom Internet) zu starten. Auf Windows-basierten Systemen muss allenfalls vorher Java ([www.java.com](http://www.java.com)) heruntergeladen werden.

### Aufträge

* + - 1. Eigenschaften von Vierecken erforschen.

Öffne die Datei Vierecke1\_Eigenschafen.ggb.

1. Erkunde die verschiedenen Vierecke, indem du die grünen Punkte verschiebst. Du kannst Diagonalen ein- und ausblenden, Streckenlängen und die Namen der verschiedenen Vierecke anzeigen lassen.
2. Stelle zu jedem Viereck möglichst viele Eigenschaften zusammen. Beachte dabei die Lage der Seiten, Streckenlängen, Diagonalen und Winkel. Die Eigenschaften dürfen sich von Viereck zu Viereck auch wiederholen!

#### *Lehrerkommentar*

*Die Aufgabe enthält alle Viereckstypen der Systematik (s.o.). Die Vierecke lassen sich entsprechend der Eigenschaften beliebig verformen. Diagonalen, Streckenlängen und Namen der Vierecke können ein- und ausgeblendet werden. Dadurch lassen sich auch Eigenschaften der Diagonalen (gegenseitiges Halbieren, etc.) ermitteln.*

*Es geht in dieser Aufgabe darum, möglichst viele Eigenschaften der jeweiligen Vierecke zu ermitteln. Es geht noch nicht darum, diese miteinander in eine Verbindung zu bringen, wobei wahrscheinlich diese Erkenntnisse (evtl. in Form von Fragen, „Ist ein Quadrat auch ein Rechteck?“) trotzdem hervortreten.*

*In der Datei sind der Einfachheit halber sämtliche Konstruktionswerkzeuge deaktiviert, lediglich das Verschiebungswerkzeug ist eingeblendet.*

*Die Aufgabe kann alleine oder auch gut in 2-3er-Gruppen bearbeitet werden. Der Zeitbedarf liegt (je nach Möglichkeit und methodischem Konzept) bei 10-20 Minuten.*

* + - 1. Vierecke anhand Eigenschaften erforschen.

Öffne die Datei Vierecke2\_Eigenschaften.ggb.

1. Erkunde die verschiedenen Eigenschaften. Wähle dazu zuerst in Gedanken einzelne oder eine Kombination von Eigenschafen aus und notiere, welche Art von Viereck du als Ergebnis erwartest.
Klicke nun die Eigenschaften an und überprüfe durch Bewegen der Punkte, welches Viereck dabei herauskommt. Kommentiere deine Notizen, hat deine Vorhersage gestimmt? Falls nein, weshalb nicht?
Führe diese Aufgabe mehrfach durch!
2. Stelle möglichst viele Sätze in folgendem Stil auf: „Ein Quadrat ist auch ein Rechteck, weil auch bei ihm alle Winkel 90° sind (und je zwei Seiten parallel).“ Verwende dabei möglichst viele verschiedene Vierecke.

Du darfst dazu auch nochmals die Datei aus Aufgabe 1 öffnen, wenn dir das leichter fällt.

#### *Lehrerkommentar*

*Die Aufgabe entspricht quasi der Umkehrung der ersten Aufgabe und zielt auf eine Festigung der Erkenntnisse der Aufgabe 1 ab. Die Lernenden können verschiedene Eigenschaften durch Anklicken kombinieren und dann das Viereck diesen Einschränkungen entsprechend bewegen.*

*Aufgabe 1 und 2a basieren auf denselben Zielen, die schliesslich in 2b münden sollten. Aufgrund der Erkenntnisse aus 2b kann schliesslich (durch die Lernenden selber oder vom Lehrer) die Systematik der Vierecke abgeleitet werden. Diese Aufgabe ist für Lernende nicht einfach, da sie ein recht hohes Strukturierungsvermögen (und damit auch Abstraktionsvermögen) verlangt. Es kann jedoch eine reizvolle abschliessende Gruppenarbeit des Themas „Eigenschaften von Vierecken“ sein.*

*In der Datei sind der Einfachheit halber sämtliche Konstruktionswerkzeuge deaktiviert, lediglich das Verschiebungswerkzeug ist sichtbar.*

*Aufgabe 2a kann alleine oder auch gut in 2-3er-Gruppen bearbeitet werden. Der Zeitbedarf liegt (je nach Möglichkeit und methodischem Konzept) bei 10-15 Minuten.*

*Aufgabe 2b benötigt etwas mehr Zeit, ca. 15-20 Minuten.*

*Setzt man die Systematik-Aufgabe schülerzentriert in Gruppen um, benötigt man sicher
20-30 Minuten dafür und nochmals 10-15 Minuten für eine Besprechung im Klassenverband. Diese Systematik lässt sich danach aber gleich als Theorie-Eintrag verwenden.*

* + - 1. Blackbox „finde die Vierecke“.

Öffne die Datei Vierecke3\_Blackbox\_Vierecke\_finden.ggb.

Gehe nach dort beschriebener Anleitung vor.

#### *Lehrerkommentar*

*Die verschiedenen Viereckstypen liegen ungeordnet übereinander. Allerdings sind nur die Eckpunkte sichtbar! Es geht um eine Vertiefung der Aufgaben 1 und 2. Anhand der gefundenen Eigenschaften können die Lernenden die einzelnen Vierecke durch Bewegen von Punkten und Nachvollziehen von Abhängigkeiten (andere Punkte bewegen sich mit!) isolieren.*

*Zeitbedarf: ca. 15 Minuten. Es kann auch gut zeitorientiert gearbeitet werden oder sogar als Wettbewerb (wer findet in 5 Minuten am meisten Vierecke?).*

*Auch hier sind die Konstruktionswerkzeuge deaktiviert, nur das Verschiebungswerkzeug ist vorhanden.*

*Die Aufgaben 1-3 bilden den Kern der Lerneinheit. Werden sie eingehend bearbeitet, sollte die Erarbeitung der Systematik und der Eigenschaften der Vierecke abgeschlossen sein.*

* + - 1. Blackbox „grüne und rote Punkte“.

Öffne die Datei Vierecke4\_Blackbox\_grün\_rot.ggb.

Gehe nach dort beschriebener Anleitung vor.

#### *Lehrerkommentar*

*Verbindet man die Seitenmitten eines beliebigen allgemeinen Vierecks miteinander, ergibt sich immer ein Parallelogramm. Diese Erkenntnis ist doch einigermassen erstaunlich. Aufgabe 4 beruht auf diesem Sachverhalt, jedoch sind nur Punkte und keine Strecken eingezeichnet.*

*Zur Begründung können die Lernenden die Strecken oder Vierecke auch einzeichnen. Die Begründung ist auf Anhieb nicht einfach, lässt sich aber über die Aufteilung des Vierecks in zwei Dreiecke (Seiten des Parallelogramms sind dann parallel zu den Diagonalen!) einsichtig machen.*

*Zeitbedarf: Erforschen ca. 10 Minuten, Begründen 10-20 Minuten*

* + - 1. Mittelsenkrechten

Öffne die Datei Vierecke5\_Mittelsenkrechten.ggb.

1. Zeichne ein allgemeines Viereck. Erstelle die Mittelsenkrechten über den Seiten des Vierecks (mit Mittelsenkrechtenwerkzeug auf die Seiten klicken). Schiebe nun die Eckpunkte des Vierecks so lange umher, bis alle Mittelsenkrechten sich in einem Punkt schneiden. Markiere diesen Punkt mit dem Schnittpunkt-Werkzeug (schneide zwei beliebige Mittelsenkrechten miteinander).
2. Welche Feststellung zwischen diesem Punkt und den Eckpunkten des Vierecks kannst du machen? (Du darfst auch messen.)
3. Kannst du die Feststellung erklären? Auf welcher geometrischen Figur liegen die vier Eckpunkte? Zeichne diese Figur ein.
4. Drucke dein Ergebnis aus (Menü Datei/Druckvorschau…). Schau darauf, dass deine ganze Zeichnung zu sehen ist, passe nötigenfalls den Massstab an.
5. Zusatz: Erstelle eine neue Zeichnung (Datei/neu, dann „nicht speichern“ wählen). Zeichne dieselbe Anordnung von vorher, nun aber umgekehrt, so dass sich die Mittelsenkrechten automatisch immer schneiden. Denk daran, wo die Eckpunkte deines Vierecks liegen müssen!
6. Speichere diese Datei unter deinem Namen (Datei/Speichern unter).

#### *Lehrerkommentar*

*In dieser Aufgabe geht es das erste Mal darum, selber etwas zu konstruieren. Der Einfachheit halber sind nur die Werkzeuge eingeblendet, die auch verwendet werden müssen. Mathematisch muss der Begriff der Mittelsenkrechten vorher bekannt sein.*

*Mit der beschriebenen Anleitung benötigen die Lernenden keine zusätzliche Einführung zum Konstruieren in GeoGebra. Allenfalls kann man kurz auf die Werkzeugleiste hinweisen.*

*Inhaltlich zeichnen die Lernenden den Umkreis eines Vierecks. Da es nicht für jedes Viereck einen Umkreis gibt, müssen sie das Viereck über den Mittelsenkrechtenschnittpunkt von Hand so anpassen, dass die Eckpunkte den gleichen Abstand zum Mittelsenkrechtenschnittpunkt besitzen und damit das Viereck einen Umkreis erhält.*

*Teilaufgabe e) ist nicht so einfach und kann allenfalls weggelassen werden. Man zeichnet zuerst einen Kreis und kann dann die Punkte des Vierecks direkt auf den Kreis setzen (sie sind dann nur noch auf dem Kreis verschiebbar). Damit schneiden sich die Mittelsenkrechten immer in einem Punkt.*

*Zeitbedarf: a) – d) ca. 15 Minuten, e) ca. 10-30 Minuten (je nach „Einsichtsgeschwindigkeit“)*

* + - 1. Winkelhalbierende

Öffne die Datei Vierecke5\_Winkelhalbierende.ggb.

1. Zeichne ein allgemeines Viereck. Erstelle in jedem Eckpunkt die Winkelhalbierende, indem du das Werkzeug „Winkelhalbierende“ anwählst und dann drei Punkte anklickst, wovon der mittlere der Punkt ist, durch den die Winkelhalbierende gehen soll (Scheitel des Winkels).
2. Ziehe wiederum solange an den Eckpunkten, bis die Winkelhalbierenden sich in einem Punkt schneiden und markiere diesen Punkt (zwei Winkelhalbierende schneiden).
3. Welche Feststellung zwischen diesem Punkt und den Seiten des Vierecks kannst du machen? (Wiederum ist messen möglich.)
4. Kannst du deine Feststellung erklären? Ist es wieder möglich, eine geometrische Figur irgendwie einzupassen?
5. Drucke die Datei aus (Datei/Druckvorschau…)

#### *Lehrerkommentar*

*Aufgabe 6 funktioniert analog zur Aufgabe 5, diesmal geht es allerdings um den Inkreis. Die Umkehraufgabe ist hier zu schwierig, deshalb wurde sie weggelassen. Um den Inkreis genau zu zeichnen, müssen die Schüler das Werkzeug „Senkrechte Gerade“ und danach „Schneide zwei Linien“ verwenden. Allenfalls muss man sie in diesem Punkt darauf hinweisen, dass GeoGebra nicht automatisch Schnittpunkte erkennt, sondern dass man diese selber konstruieren muss. Zeitbedarf: a) – e) ca. 15 Minuten.*

### Weiterführende Aufträge

Als weiterführende Aufträge (die jedoch etwas schwieriger sind und evtl. grössere Betreuung durch die Lehrperson erfordern) können Aufgaben aus der Lernumgebung *Parallelogramme und Dreiecke* aus dem Lehrmittel *mathbuch 1*, aufbereitet im Heft *Impulse zum Computereinsatz* aus dem Klett Verlag verwendet werden. Dort steht vor allem das Thema Flächenberechnung von Vierecken im Vordergrund.