

# Hinweise zu den Lernumgebungen des mathbuch 2

M. Lacher, aktualisiert am 5.3.17

Geordnet nach Planungsvorschlag DVS Luzern Juni 2016 (M. Hübner)

## LU 9 Negative Zahlen

- Diese LU wird absichtlich vor der LU 1 Koordinaten behandelt, weil dort negative Zahlen bereits vorkommen.
- Das Kontospiel (Nr. 4) bietet eine hervorragende Grundlage, um eine gute Vorstellung von Addition und Subtraktion von positiven und negativen Zahlen aufzubauen. Dabei wird auch das Vorzeichen (Gutschein/Schuldschein) sauber vom Operationszeichen (erhalten/weggeben) abgegrenzt. Es lohnt sich, Zeit in dieses Spiel und vor allem in die Besprechung und den Aufbau der Grundvorstellung zum Addieren und Subtrahieren von negativen Zahlen zu investieren!
- Nr. 7 eher zu abstrakt, bringt wenig für den Aufbau einer Grundvorstellung, kann auch weggelassen oder kurzgehalten werden.
- Nr. 11: Grundvorstellung für die Multiplikation von negativen Zahlen. Das Modell mit dem Malkreuz in Verbindung mit den Rechtecken funktioniert recht gut, ist aber etwas abstrakt und damit anspruchsvoll. Das bedeutet, die Aufgabe muss sehr gut nachbesprochen werden, damit der Aufbau der Vorstellung bei allen Lernenden gelingt. Es lohnt sich, in C und D Zeit zu investieren und diese Aufgaben mit den Lernenden anschliessend gut zu besprechen (dabei die Ergebnisse und Vorstellungen der Lernenden ins Zentrum stellen!).
- AH+ Nr. 8: Einige Lernende rechnen  $(20+9)(20+9)$ . Evtl. darauf hinweisen, dass man möglichst geschickt rechnen soll.

## LU 1 Koordinaten

- In dieser LU werden zwei Inhalte gleichzeitig repetiert: Umgang mit Koordinaten und die Kongruenzabbildungen. Dabei sind die Spiegelungen (insb. Achsenspiegelung) meist kein grosses Problem, die Schiebung und Drehung aber oft neu für Lernende (je nachdem ob man im 1. SJ daran gearbeitet hat).
- Die LU bietet vielfältige Möglichkeiten für entdeckendes Lernen, deshalb immer wieder Besprechungsrunden über diese Entdeckungen einplanen.

## LU 16 Zehn<sup>hoch</sup>

- Diese Lernumgebung kann in der Jahresplanung auch an einer anderen Stelle eingebaut werden. Sie schliesst lediglich durch das erstmalige Auftreten von negativen Exponenten an LU 9 an.
- Die Erkenntnisse aus der Tabelle bei SB 1 sind sehr wichtig, unbedingt genügend Zeit einberechnen. Bruchrechnen macht häufig Mühe (1/10).
- Anstelle der Fotos oben kann auch ein Film verwendet werden:  
<https://www.zebis.ch/unterrichtsmaterial/scale-universe>
- Wissenschaftliche Schreibweise geht optisch etwas unter, ist aber das zentrale inhaltliche Element der LU
- Potenzoperationen (ab SB 12) evtl. nur im Niveau AB durchführen.

## LU 21 Gewinnen

- Die LU 21 (und ggf. 31) werden bewusst weit vorne in der Jahresplanung eingebaut, weil das Thema Stochastik traditionell eher stiefmütterlich behandelt wurde, im Lehrplan 21 aber mehr Gewicht erhält (und damit den Alltag besser abbildet).
- Die Aufgaben der Lernumgebung müssen nicht strikt sequentiell abgearbeitet werden, es ist gut denkbar, sie auch Postenarbeit durchzuführen (vgl. Begleitband).
- Die gesamte Lernumgebung ist sehr handlungsorientiert/experimentorientiert und damit prozessorientiert ausgelegt. Sie bietet tolle Gelegenheit auf die Lösungsprozesse (Darstellungen, Strategien, Steuerung von Prozessen etc.) von Lernenden einzugehen.
- Mit Darstellungen wie Baumdiagrammen arbeiten, um Zählvorgänge offenzulegen.
- Es ist nicht das Ziel, die klassischen Formeln aus der Kombinatorik einfach anzuwenden, sondern vielmehr diese Zusammenhänge und Zählweisen zu entdecken.
- Viele dieser Experimente können auch mit Excel simuliert werden; statt also nur 20 Mal bei Minilotto zu tippen, kann man sehr einfach Tausende Male tippen und die relativen Häufigkeiten dann auswerten und reflektieren.

## LU 31 Gesetze des Zufalls

- Diese LU ist etwas stärker sequentiell und systematisch aufgebaut, trotzdem kann man gut auch nur Teile (z.B. 1-6 oder 7-8) bearbeiten.
- Ansonsten gelten die gleichen Bemerkungen wie bei LU 21.

## LU 2 Terme für Umfang und Fläche

- Diese LU hilft, Vorstellungen für Ausmultiplizieren und ggf. Ausklammern aufzubauen.
- Es soll möglichst intensiv an diesen Vorstellungen gearbeitet werden. D.h. im Unterricht immer wieder mit Bildern (Flächen und Umfänge) arbeiten und lange auf der ikonischen (oder gar enaktiven) Ebene bleiben.
- Die Lernenden sollen an den Flächen- und Umfangmodellen erklären können, wie man ausmultipliziert oder Terme zusammenfassen kann.
- Die LU 2 bildet das Fundament für die LU 18 Binome und natürlich andere Termumformungen. Es ist deshalb auch denkbar, die LU 18 in der Jahresplanung an diese Stelle vorzuziehen.

## LU 10 Verpackte Zahlen

- Knüpft direkt an „Knack die Box“ aus dem mb1 an und nimmt das dort eingeführte Modell der Boxen und Hölzchen wieder auf.
- Die Vorstellung der Boxen, das handelnde und ikonische Arbeiten muss gut verankert sein, damit auf die symbolische Ebene gewechselt werden kann. Evtl. dort nochmals zurückgreifen auf Aufgaben aus dem mb1, v.a. mit schwächeren Lernenden.
- Hier werden zum ersten mal die Äquivalenzumformungen explizit eingeführt → zentral in dieser LU (Ab SB 4).
- Die Aufgaben SB 8-10 können gut auch weggelassen werden, dafür den Block Rechenttraining stärker gewichten.
- Bei Problemen mit Termumformungen die Modelle aus LU 2 wieder aufnehmen!

## LU 25 Magische Quadrate

- Recht anspruchsvolle Lernumgebung, v.a. ab Aufgabe 4.
- Alternativ könnte auch LU 24 Zählstrategien bearbeitet werden (dort geht es mehr um das Aufstellen komplizierter Terme als ums Lösen von Gleichungen).

## LU 11 Dreiecke – Vierecke

- Die Aufgaben des Buches und des Arbeitsheftes sind ergänzend überschneidend angelegt, evtl. hin- und herswitchen, auch je nach Wissensstand der Lernenden
- SB Nr. 1: Falten ist eine wichtiger, enaktive, vorstellungsbildende Handlung, die man unbedingt einbeziehen sollte. Sie erfahren damit direkt nochmals wie sich Winkelhalbierende, Mittelsenkrechte, Höhe und Seitenhalbierende (Schwerlinie) bilden. Diese Grundkonstruktionen muss man allenfalls (evtl. auch differenzierend) im Voraus nochmals besprechen.
- SB Nr. 2: Es empfiehlt sich, mit Geogebra zu arbeiten, insbesondere bei den Konstruktionen zum Inkreis, kann man damit zeigen, wie man den Punkt auf dem Kreisumfang erhält (siehe Datei in der dropbox). Dieses Problem (Radius des Inkreises) wird in dieser Aufgabe leider vernachlässigt, hier unbedingt darauf eingehen. Im Arbeitsheft findet man eine Übersicht zu Mittelsenkrechte/Umkreis, Winkelhalbierende/Inkreis, Höhe und Seitenhalbierende.
- SB Nr. 4 und 5 kann man mit entsprechenden Konstruktionen und operativem Prinzip in Geogebra elegant und gewinnbringend ersetzen.
- SB Auch Nr. 6 und 7 kann man mit Geogebra sehr schön bearbeiten.
- SB Nr. 9 macht am Computer höchstens zu Übungszwecken Sinn, da damit kein Mehrwert erzielt wird.
- SB Nr. 13, Trapezflächen: Bei dieser Aufgabe kann man mit stärkeren Lernenden auch offen, problemgenetisch, vorgehen: Eine Trapezfläche vorgeben und die Lernenden sollen durch zerschneiden selber einen Weg finden, die Fläche zu berechnen. Danach die verschiedenen Vorgehensweisen der Lernenden vergleichen und erst dann allenfalls mit den Berechnungsweisen im Buch vergleichen.

## LU 12 Pythagoras

- Die Aufgaben SB 1-4 können auch auswahlweise bearbeitet (oder ganz weggelassen) werden.
- Statt Aufgabe SB 5 kann ein (entdeckender) Auftrag mit Geogebra (siehe dropbox) durchgeführt werden.
- Zwei „didaktische Dogmen“ beim Satz von Pythagoras:
  1. Der Satz von Pythagoras ist ein geometrischer Satz (kein algebraischer!). D.h. es ist wichtig, die entsprechenden Vorstellungen aufzubauen. Die Formel  $a^2 + b^2 = c^2$  gilt nur im korrekten geometrischen Zusammenhang (also, wenn a und b die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind und c dessen Hypotenuse ist)!
  2. Der Satz von Pythagoras ist ein Satz über Flächen (Quadrate) und nicht über Strecken! Wird diese Vorstellung nicht verankert, wird es immer wieder Lernende geben, die  $a+b=c$  rechnen!
- Der Aufbau dieser Vorstellung kann über die Parkette führen. Dabei kann Geogebra (siehe dropbox) eine grosse Hilfe sein.

- Die Lernenden auch beim Berechnen immer wieder die Quadrate um das rechtwinklige Dreieck skizzieren lassen (Vorstellung!).
- Das Problem, dass die Lernenden die Quadratwurzel (von Nicht-Quadratzahlen) noch nicht kennen, kann man auf drei Arten lösen, wovon die letzte zu präferieren ist:
  - Man lässt die Lernenden die Wurzel schätzen.
  - Man zeigt den Lernenden die Wurzeltaste auf dem TR.
  - Man greift dann, wenn das Problem zum ersten Mal auftaucht, es mit der gesamten Klasse auf und geht fließend in die LU 13 über und baut so diese Operation „organisch“ aus dem Unterricht heraus auf.

## LU 13 Quadratwurzel

- Auch für diese neue Operation gilt: Vorstellung aktivieren ist zentral! Die Quadratwurzel bezeichnet die Operation, zur Fläche eines Quadrates die passende Seitenlänge zu bestimmen. Gelingt der Aufbau dieser Vorstellung nicht, wird es Lernende geben, die einfach die Fläche durch 2 dividieren.
- Die Aufgaben SB 1 und 2 leiten genau auf diese Vorstellung hin. Aufgabe SB 3 zeigt ein einfaches Verfahren, um Quadratwurzeln zu bestimmen, SB 4 ein komplizierteres, das für Lernende nicht so einfach zu verstehen ist.
- Statt SB 3 kann man davon auch die Lernenden selber ein Verfahren herausfinden lassen, indem man ihnen das Problem stellt: „Ein Quadrat hat eine Fläche von 10. Wie gross ist seine Seite. Findet das mit dem Taschenrechner heraus, wobei ihr nur Grundoperationen verwenden dürft.“ Danach werden die verschiedenen Verfahren verglichen und man kann nun auf die „raffineren“ Verfahren bei SB 3 und 4 eingehen.
- SB 4: Eine einfache Geogebra-datei hilft, das Vorgehen dynamisch zu veranschaulichen (siehe dropbox).
- SB 8: Anspruchsvoll, evtl. zuerst mit Zahlen (und einer echten Kiste) lösen.
- Die Rechenregeln mit Wurzeln werden bei SB 10 nur an einfachen Zahlbeispielen eingeführt. Im AH+ 7–12 erfolgt die eigentliche Erarbeitung und Vertiefung dazu.

## LU 14 Steigung

- Verwandtschaft mit LU 12, da auch rechtwinkliges Dreieck.
- Wichtig: Steigung und Winkel.
- Fragen thematisieren: Was ist die Steigung eigentlich, wieso wird sie so berechnet, wieso wird sie überhaupt benötigt (und nicht mit dem Winkel gearbeitet)?
- Experimentelle Arbeit mit SB 1 führt (in Klassendiskussionen der Ergebnisse) zu weiteren Fragen: Welche Steigung ist grösser? Das führt auf die Lösung der obigen Fragen: Steigung ist ein Mass, um die Steilheit zu vergleichen (v.a. bei unterschiedlicher Basis-Kathetenlänge). Berechnungen sind damit viel einfacher als mit Winkeln (Trigonometrie!), da die Ähnlichkeit ausgenutzt werden kann.
- SB 2 braucht recht viel Zeit, ist aber lohnenswert für den Aufbau der Vorstellung.
- SB 10 – 13 ist propädeutisch für die lineare Funktion und kann auch weggelassen werden (kommt im mathbuch 3/3+ nochmals systematisch).

## LU 18 Produkte von Binomen

- Im Niveau C weglassen.
- Enger Bezug zu LU 2, evtl. hintereinander bearbeiten.

- Die erste Seite (Nr. 1 und 2) ist eigentlich Repetition der LU19 aus mb1. Nr. 2 ist eine Problemlöseaufgabe zu diesen Termen, die v.a. dann für das Thema der LU viel hergibt, wenn man die Strategien der Lernenden intensiv miteinander vergleicht.
- Die Aufgaben 1 – 4 im AH+ sind wichtig zur Vertiefung der Vorstellung, evtl. auch Buch Nr. 2 weg lassen und dafür AH+ 1 – 4 lösen.
- SB 7 recht anspruchsvoll, evtl. Hinweise geben, wie die Quadrate gezeichnet werden müssen. Der Aufbau dieser Vorstellung ist aber sinnvoll, um dem „Vergessen des mittleren Termglieds“ (2ab) vorzubeugen.
- Letzte Seite nur für stärkere Lernende verwenden, evtl. nur in der Vorbereitung von Aufnahmeprüfungen (systematisches Faktorisieren).
- Hinweis Aufnahmeprüfungen: Mehrmaliges Faktorisieren und „Klammersatz“ (typischer Trinom durch Summe und Produkte der Koeffizienten faktorisieren) sind nicht Teil des Stoffplans

## LU 4 Operieren mit rationalen Zahlen

- Die Modelle bei 4-6 sind aus dem mathbuch 1 bekannt. Ggf. auffrischen.
- Evtl. statt Variablen zuerst Zahlen verwenden, um Abstraktionsgrad zu verringern.
- Division von Brüchen: Allgemeiner Beweis für die Multiplikation mit Kehrwert ziemlich für Lernende anspruchsvoll.

## LU 6 Relativ – absolut

- Gute LU für die Frage, was ist 100%?
- Für SB 3-5 evtl. Daten des eigenen Kantons besorgen (BFS oder kantonales Amt für Statistik).

## LU 20 Geldgeschäfte

- Diagramme neben SB 1 und 3 sind zentral für die Vorstellung. Solche Diagramme bei Aufgaben immer wieder zeichnen lassen.
- Die Aufgaben können auch selektiv bearbeitet werden.
- Aufgabe 6: Gute Gelegenheit, das System von Geldverleih grundsätzlich zu erklären. Wieso bezahlt/erhält man überhaupt Zins? Bis hin zu „politischen“ Elementen wie Negativzins.
- Aufgaben SB 7 – 12 ziemlich langweilig, sehr ähnlich im Aufbau.

## LU 27 Zinsen

- In dieser LU geht es v.a. um den Marchzins, sie kann evtl. individualisiert eingesetzt werden (für KV-Anwärter, Aufnahmeprüfungskandidaten oder starke Lernende).
- Aktuelle Zinsdaten besorgen.

## LU 17 Kreis

- Schöne experimentelle Erarbeitung des Kreisumfangs und der Kreisfläche.
- Handlungsorientiert vorgehen, ausprobieren, Vermutungen aufstellen, besprechen etc.
- Auf Niveau A und B SB 4 weglassen und selber Zusammenhänge zwischen Durchmesser und Umfang finden lassen. Resultate von SB 3 dazu evtl. über die gesamte Klasse in einer Excel-Tabelle bei der LP sammeln und die Vermutungen daran (mit Beamer) in der Besprechung überprüfen.
- Achtung, bei SB 3 gibt es grosse Messfehler, teilweise auch systematische!

- SB 6 und 7 sind sehr wichtig für den Aufbau der Vorstellung „Kreisfläche ist proportional zu Radiusquadrat“.
- Für SB 8 könnte man allenfalls Geogebra einsetzen und die Anzahl Sektoren dynamisch variieren (Umsetzung fehlt noch...).
- Die Aufgaben SB 9 – 14 können auch selektiv bearbeitet werden.

## LU 22 Kreise – Linien – Winkel

- Spannende aber anspruchsvolle LU.
- Wenn irgendwie möglich Geogebra einsetzen.
- Der Beweis für den Peripheriewinkelsatz (alle Peripheriewinkel sind gleich gross) ergibt sich automatisch aus dem Zentriwinkelsatz (weil jeder Peripheriewinkel halb so gross ist wie der zugehörige Zentriwinkel und diese bei Nr. 3 immer gleich gross sind).
- Nr. 5 Thaleskreis lässt sich auch einfacher begründen (wenn z.B. Zentriwinkelsatz weggelassen wird)
- Nr. 6C: Im Begleitband fehlt die Begründung... Diese ist nicht ganz so simpel, hier ein Ausschnitt aus einem Internetforum dazu:

„[...]Wir betrachten einen Kreis  $k$  um  $M$  vom Radius  $r$  und wählen auf ihm einen Punkt  $B$  aus. Senkrecht auf der Strecke  $MB$  zeichnen wir durch  $B$  eine Gerade  $t$ .  
 Nach Konstruktion haben  $k$  und  $t$  den Punkt  $B$  gemeinsam. Jetzt nehmen wir an, daß sie einen weiteren von  $B$  verschiedenen Punkt  $A$  gemeinsam haben, und betrachten das in  $B$  rechtwinklige Dreieck  $MAB$ . In ihm ist der rechte Winkel der größte (folgt aus der Winkelsumme), also liegt ihm auch die größte Seite  $MA$  gegenüber.  $MA$  ist insbesondere größer als  $MB$ , also größer als  $r$ . Das widerspricht aber der Tatsache, daß  $A$  auf dem Kreis liegt,  $MA$  also auch die Länge  $r$  haben sollte.  
 Wir haben aus der Annahme, daß  $k$  und  $t$  auch den Punkt  $A$  gemeinsam haben, einen Widerspruch erhalten. Also können  $k$  und  $t$  nur den Punkt  $B$  gemeinsam haben.[...]“  
 (<http://www.matheboard.de/archive/539306/thread.html>, 5.3.17)

- Nr. 10: Alternative (einfachere?) Begründung für 10B:
  - Man führt den Zentri-Winkel  $\omega = \angle CMA$  ein.
  - Dann gilt gemäss Zeichnung in der Aufgabe:  $\omega = 2\beta$  (Zentriwinkelsatz).
  - Und analog:  $360^\circ - \omega = 2\delta$  (ebenfalls Zentriwinkelsatz, die Sehne liegt halt einfach oberhalb des Mittelpunktes, deshalb wird der zugehörige Zentriwinkel „grösser“ als  $180^\circ$ ).
  - Nun kann man die erste Gleichung in die zweite einsetzen:  $360^\circ - 2\beta = 2\delta$  und umformen zu  $360^\circ = 2\delta + 2\beta$  und schliesslich  $180^\circ = \delta + \beta$ .

## LU 5 Grössen

- Es geht in dieser LU eher um funktionale (proportionale) Zusammenhänge als um die Arbeit mit bei uns üblichen Grössen, da über weite Teile uns fremde Grössen verwendet werden (Fuss, Zoll etc.)
- Bereits SB 1 anspruchsvoll (aber gut).
- Aufgaben selektiv bearbeiten.

## LU 19 Grundfläche mal Höhe

- SB 1: Zeit investieren lohnt sich! D und E sind spannend, Strategien vergleichen!
- SB 4: Mit Hilfe von Bierdeckeln zeigen, sind bei Brauereien, z.B. bei Baarer Bier erhältlich.
- SB 5: Wichtig: Was ist Grundfläche, wo ist die Höhe?
- Prinzip von Cavalieri: Dazu gibt es gute Geogebra-Umsetzungen, z. B.:
  - <https://www.geogebra.org/m/ePZXD5WD>
  - <https://www.geogebra.org/m/auHB2YWq>
- SB 8 und 9 können auch weggelassen werden.