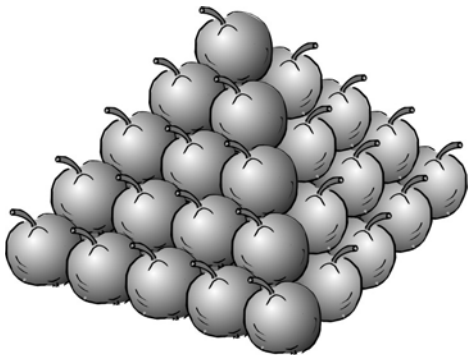
Pyramiden

von Dieter Ortner

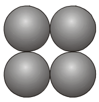
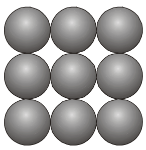
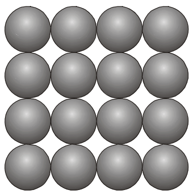
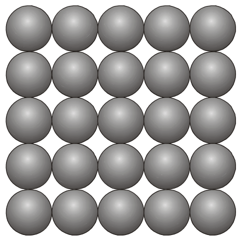


Auf Obst- und Gemüsemärkten findet man oft liebevoll aufgeschichtete Pyramiden aus Äpfeln, Orangen, Zitronen und was sich halt sonst noch so in dieser Form aufschichten lässt.

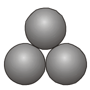
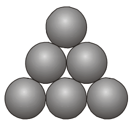
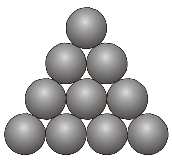
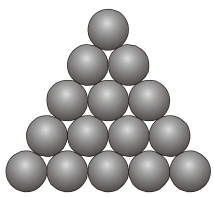
Wie viele Äpfel sind hier aufgeschichtet?

Als Vorbereitung müssen wir uns zunächst mit *Quadratzahlen* und *Dreieckszahlen* befassen. Vergleiche dazu auch den Beitrag „Zahlenreihen“ im Heft … der neuen Schulpraxis.

Quadratzahlen sind sehr einfach:

1	2	3	4	5	6	7	n
1	4	9	16	25	36	49	n^2
							

Dreieckszahlen sind etwas schwieriger zu verstehen:

1	2	3	4	5	6	7	n
1	1 + 2 = = **3**	1 + 2 + 3 = 3 + 3 = = **6**	6 + 4 = **10**	10 + 5 = **15**	15 + 6 = **21**	21 + 7 = **28**	$\frac{n(n+1)}{2}$
							

Die Formel $\frac{n(n+1)}{2}$ lässt sich jedoch leicht beweisen. Man kann das allgemein machen, ich zeige das hier nur am Beispiel n = 8:

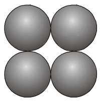
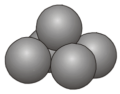
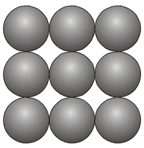
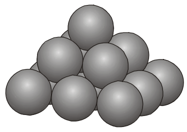
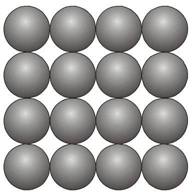
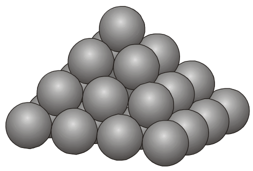
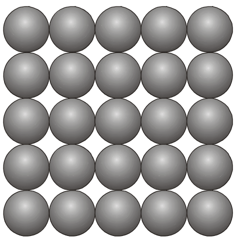
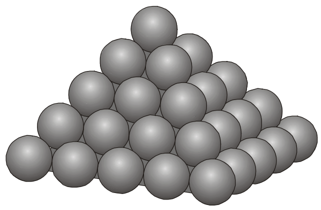
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = x$

$\underline{7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = x}$ wir addieren die beiden Gleichungen

$8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 2x = 7 \cdot 8 = 56$

Daraus folgt x = 56 : 2 = **28**

Quadratische Pyramiden

n	Kugeln pro Schicht	n^2	Pyramiden	Gesamtzahl an Kugeln
1		1		1
2		$2^2 = 4$		1 + 4 = 5
3		$3^2 = 9$		5 + 9 = 14
4		$4^2 = 16$		14 + 16 = 30
5		$5^2 = 25$		30 + 25 = 55
6		$6^2 = 36$		55 + 36 = 91
7		$7^2 = 49$		91 + 49 = 140
8		$8^2 = 64$		140 + 64 = 204

Will man nun berechnen, wie viele Kugeln man etwa für n = 20 oder für n = 100 benötigt, so müsste man diese Tabelle bis n = 20 oder gar bis n = 100 fortsetzen. Eine etwas mühsame Angelegenheit. Einfacher geht es, in dem man eine Formel verwendet. Diese Formel ist allerdings nicht ganz einfach zu beweisen, darauf sei hier verzichtet.

Für eine Pyramide mit n Kugeln Basislänge, benötigt man $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ Kugeln.

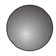
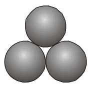
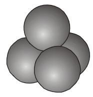
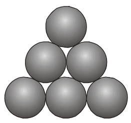
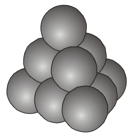
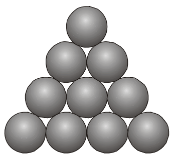
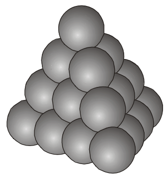
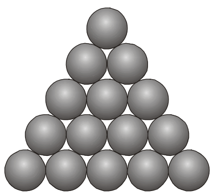
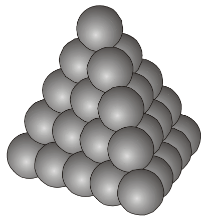
Überzeuge dich von der Richtigkeit der Formel für n = 1, 2, 3 …

Beispiel n = 8: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} = 204$

Berechne nun: Wie viele Kugeln braucht es für eine Pyramide mit n = 20?

(Lösung: 2870 Kugeln)

Dreieckige Pyramiden

n	Kugeln pro Schicht	$\frac{n(n+1)}{2}$	Pyramiden	Gesamtzahl an Kugeln
1		1		1
2		1 + 2 = 3		1 + 3 = 4
3		3 + 3 = 6		4 + 6 = 10
4		6 + 4 = 10		10 + 10 = 20
5		10 + 5 = 15		20 + 15 = 35
6		15 + 6 = 21		35 + 21 = 56
7		21 + 7 = 28		56 + 28 = 84
8		28 + 8 = 36		84 + 36 = 120

Auch hier gibt es allgemeine Formeln.

Für die n-te Schichte braucht es $\frac{n(n+1)}{2}$ Kugeln. Beispiel n = 8: $\frac{8 \cdot 9}{2} = 36$

Für eine dreieckige Pyramide mit n Kugeln Basislänge braucht es $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ Kugeln.

Auch diese Formel ist nicht ganz einfach zu beweisen, wir wollen hier darauf verzichten.

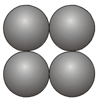
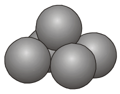
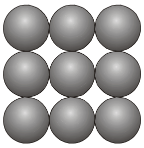
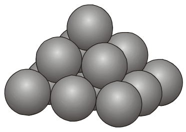
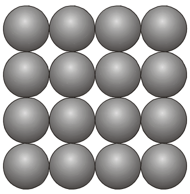
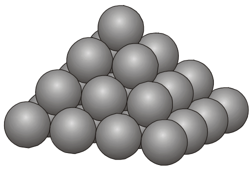
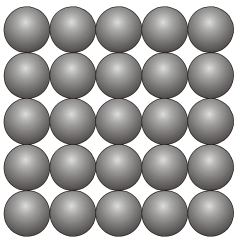
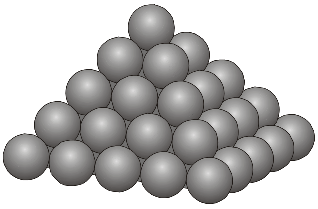
Überzeuge dich von der Richtigkeit der Formel für n = 1, 2, 3 …

Beispiel n = 8: $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 120$

Berechne nun: Wie viele Kugeln braucht es für eine Pyramide mit n = 20?
(Lösung: 1540 Kugeln)

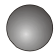
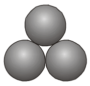
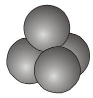
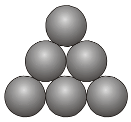
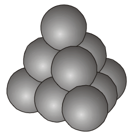
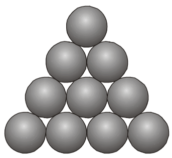
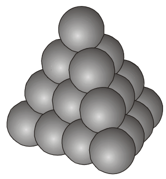
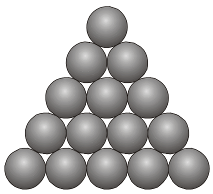
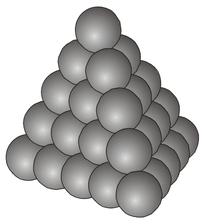
Kopiervorlage

Quadratische Pyramiden

n	Kugeln pro Schicht	n^2	Pyramiden	Gesamtzahl an Kugeln
1		1		1
2		$2^2 = 4$		$1 + 4 = 5$
3		$3^2 = 9$		$5 + 9 = 14$
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
...				
20				
n		n^2		$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Kopiervorlage

Dreieckige Pyramiden

n	Kugeln pro Schicht	$\frac{n(n+1)}{2}$	Pyramiden	Gesamtzahl an Kugeln
1		1		1
2		1 + 2 = 3		1 + 3 = 4
3		3 + 3 = 6		4 + 6 = 10
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
...				
20				
n		$\frac{n(n+1)}{2}$		$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$