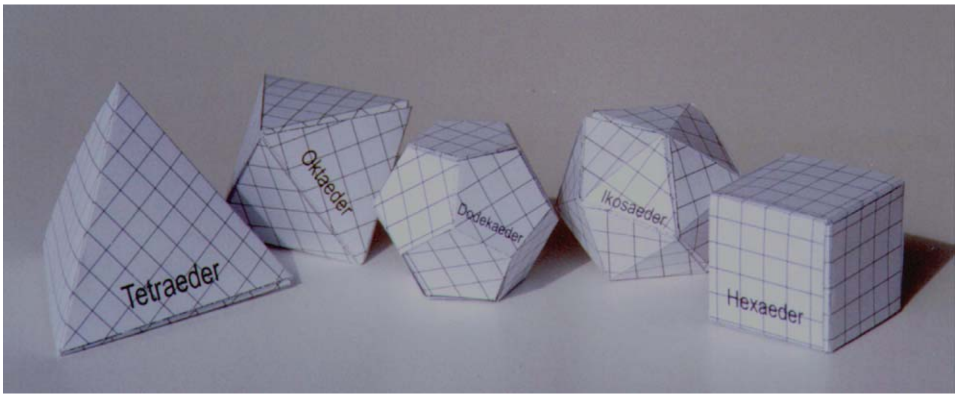


Die fünf Platonischen Körper

und warum es keine eckigen Seifenblasen gibt

Von Dieter Ortner

Die fünf Platonischen Körper bilden ein interessantes Betätigungsfeld für mathematische Aktivitäten. Man kann sie herstellen, kann den Eulerschen Polyedersatz studieren, die Dualität, das Vier-Farben-Problem kann zur Sprache kommen und man kann Berechungen anstellen.

1. Reguläre Polyeder

Polyeder, zu Deutsch „Viel-Flächner", sind Körper, die von ebenen Vielecken begrenzt sind. Also Körper deren Oberfläche aus Dreiecken, Vierecken, Fünfecken usw. besteht. Die Anzahl möglicher Polyeder ist unbegrenzt.

Von einem *regulären Polyeder* spricht man falls …

… die Oberfläche aus lauter gleichen Vielecken zusammengesetzt ist,

… alle Ecken auf einer Kugeloberfläche liegen (reguläre Polyeder besitzen also eine *Umkugel*),

… an jeder Ecke gleich viele Begrenzungsflächen zusammenstossen.

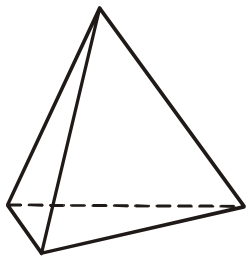
Kegel und Zylinder sind also keine Polyeder, schon gar keine regulären Polyeder. Die Cheops-Pyramide ist ein Polyeder, jedoch kein regulärer Polyeder. Ein Würfel ist ein regulärer Polyeder.

Die grossen griechischen Denker waren stark in Zahlenmystik verhaftet, man suchte die Ordnung, die die Welt beherrscht. Da verwundert es nicht, dass sich bereits Platon (um 428 bis ca. 347 v. Chr.) mit den regulären Polyedern befasste. Also nennt man sie auch *Platonische Polyeder* oder *Platonische Körper*.

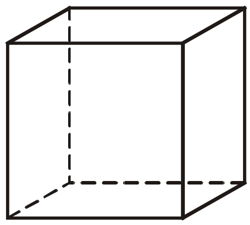
Nach Platon gibt es deren nur gerade fünf: Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder. Zu Deutsch: Vierflächner, Sechsflächner, Achtflächner, Zwölfflächner und Zwanzigflächner.

2. Vorstellungsrunde

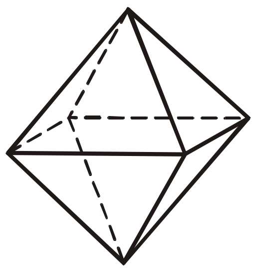
1. Tetraeder oder Vierflächner
Er ist begrenzt durch vier gleichseitige Dreiecke. An jeder Ecke treffen drei Dreiecke zusammen.



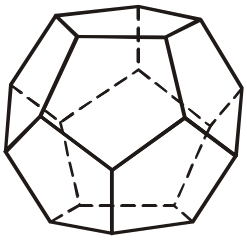
2. Hexaeder oder Sechsflächner (Würfel)
Er ist begrenzt durch sechs Quadrate. An jeder Ecke treffen drei Quadrate zusammen.



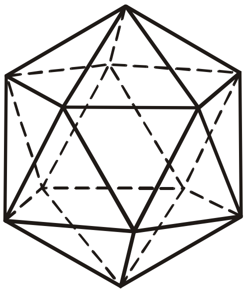
3. Oktaeder oder Achtflächner
Er ist begrenzt durch acht gleichseitige Dreiecke. An jeder Ecke treffen vier Dreiecke zusammen.



4. **Dodekaeder oder Zwölfflächner**
Er ist begrenzt durch zwölf regelmässige Fünfecke. An jeder Ecke treffen drei Fünfecke zusammen.



5. **Ikosaeder oder Zwanzigflächner**
Er ist begrenzt durch zwanzig regelmässige Dreiecke. An jeder Ecke treffen fünf Dreiecke zusammen.



3. Warum es nur gerade fünf reguläre Polyeder gibt

Gehen wir systematisch vor. Die Begrenzungsfläche muss mindestens drei Ecken besitzen.

1. Polyeder mit Dreiecken als Begrenzungsflächen:

Falls die Begrenzungsflächen Dreiecke sind, treffen an jeder Ecke drei, vier oder höchstens fünf Dreiecke zusammen. Fügt man nämlich sechs Dreiecke an einer Ecke zusammen, so erhält man bereits einen vollen Winkel – man kann allenfalls eine Ebene damit parkettieren (Abb. 1).

An regulären Polyedern mit Dreiecken als Begrenzungsflächen gibt es also nur den Tetraeder, den Oktaeder und den Ikosaeder.

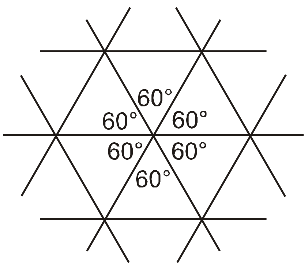


Abb. 1

2. Polyeder mit Quadraten als Begrenzungsflächen:

An jeder Ecke müssen mindestens drei Quadrate zusammenstossen. Es können aber auch nicht mehr als drei sein, denn vier mal 90° sind bereits 360°, mit vier an einer Ecke zusammenstossenden Quadraten kann man wiederum höchstens eine Ebene parkettieren.

Es gibt also nur einen regulären Polyeder mit Quadraten als Begrenzungsflächen, den Hexaeder – auch Würfel genannt.

3. Polyeder mit Fünfecken als Begrenzungsflächen:

Es müssen mindestens drei Fünfecke an einer Ecke zusammentreffen, es können aber auch nicht mehr sein. Bei Fünfecken betragen die Winkel an den Eckpunkten 108°, drei mal 108° liegt noch unter 360°, vier mal 108° liegt bereits über 360°.

Es gibt also nur einen regulären Polyeder mit regelmässigen Fünfecken als Begrenzungsflächen, den Dodekaeder.

4. Polyeder mit Sechsecken (und mehr) als Begrenzungsflächen:

Überlegt man nun in ähnlicher Weise, ob es reguläre Polyeder mit Sechsecken, Siebenecken usw. geben kann, so muss man das entschieden verneinen.

4. Sich reguläre Polyeder verschaffen

Im Spielwarenhandel gibt es neben den klassischen Würfeln auch Dodekaeder und Ikosaeder als Spielwürfel (Abb. 2).

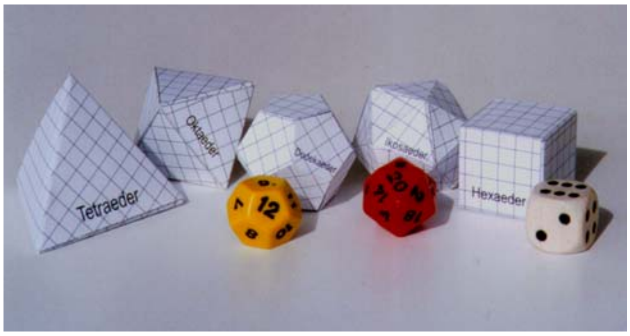


Abb. 2

Abb. 3 zeigt einen Softball aus der Baby-Abteilung eines Kaufhauses, ein Dodekaeder.

Abb. 3

5. Flechtmodelle

Man kann reguläre Polyeder auch flechten.

Sie beginnen am besten mit dem Hexaeder:

- Sie kopieren das Netz von Kopiervorlage 2 auf etwas stärkerem Papier.
- An den punktierten Linien mit einem spitzen Gegenstand ein wenig einritzen/eindrücken (an diesen punktierten Linien muss gefaltet werden).
- Das Netz ausschneiden, Einschnitte wo solche vorgesehen sind.
- An allen punktierten Linien kräftig falten.
- Das Flechten: Wichtig ist der richtige Anfang. Bei allen Polyedern kommt als erster Schritt der Name des Polyeders **Hexaeder** über das in helleren Lettern geschriebenen Wort Hexaeder. Dann wird gezöpfelt: Drunter, drüber, drunter drüber usw., wie beim Zöpfe flechten. Als Hilfe: Die schwarzen Ziffern kommen immer obenauf zu liegen.
- Zuletzt die freien Enden geeignet versorgen.

Abb. 4 und Abb. 5 zeigen die ersten Schritte beim Zöpfeln des Hexaeders. Viel Vergnügen!

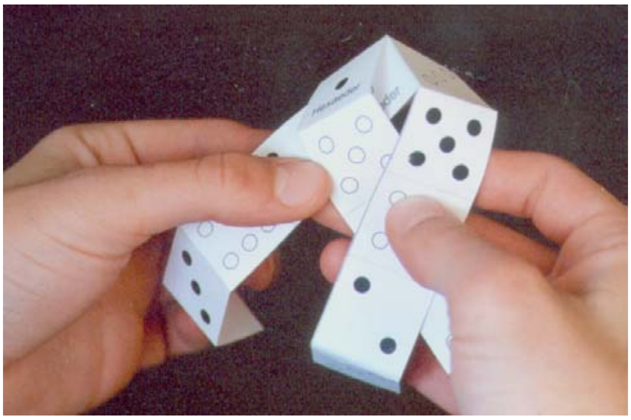


Abb. 4

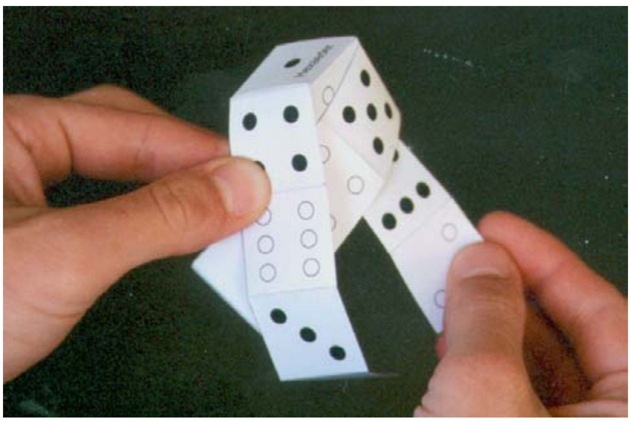


Abb. 5

Die Längen der Seitenkanten der fünf Flechtmodelle sind so gewählt, dass alle Polyeder gleiches Volumen haben (15 cm^3, sofern Sie die Vorlagen nicht verkleinern oder vergrössern).

Abb. 6

6. Polyeder auf Luftballons oder Kunstglas-Kugeln

Luftballone sind überall erhältlich, Kunstglas-Kugeln erhält man in Bastelläden.

Es ist eine interessante Aufgabe, auf einen Luftballon oder auf eine Kunstglas-Kugel einen Dodekaeder oder einen Ikosaeder zu zeichnen – auch wenn es nicht perfekt gelingen sollte.

Abb. 7 zeigt einen Ikosaeder auf einer Kunstglas-Kugel.

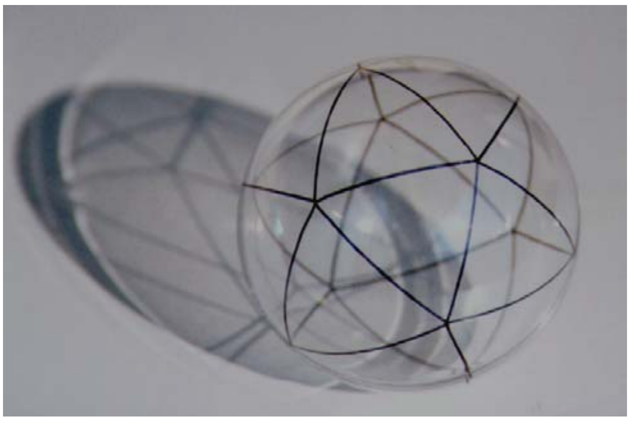


Abb. 7

7. Polyeder mit GEOMAG

GEOMAG ist ein geometrisches Spielzeug, in Spielzeugläden erhältlich. Der Bausatz besteht aus Eisenkugeln und kräftigen kleinen Stabmagneten als Verbindungsstücke. Damit kann allerhand gebaut werden, unter anderem auch die regulären Polyeder.

Abb. 8 zeigt den Dodekaeder. Er ist etwas schwierig zu bauen, weil er nicht starr ist, sondern deformiert werden kann (und sich manchmal unter dem eigenen Gewicht selbst deformiert).

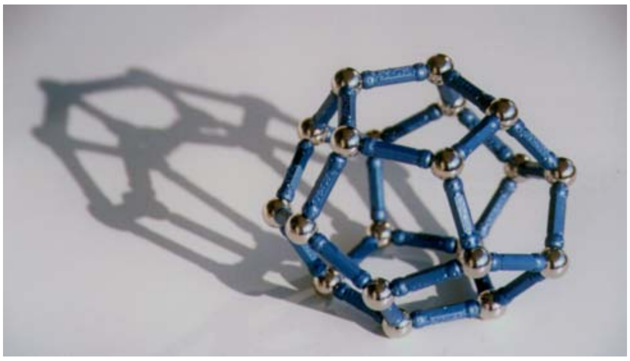


Abb. 8

Tetraeder und Oktaeder sind starre Gebilde. Der Würfel nicht, er kann deformiert werden.

Abb. 9 ist eine Gruppenaufnahme der Familie der regulären Polyeder.

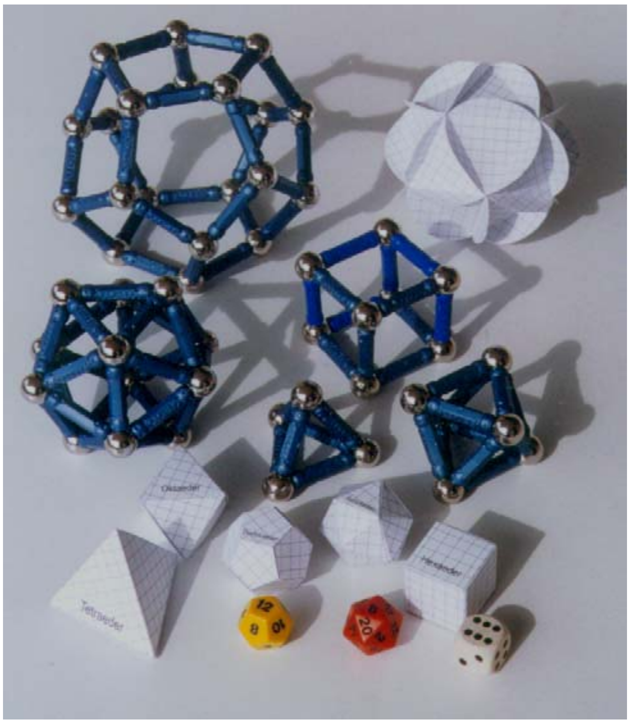


Abb. 9

8. Ecken, Flächen und Kanten

Hat man einen Polyeder vor sich, können Ecken, Flächen und Kanten gezählt werden. An diesen Zahlen kann Interessantes entdeckt werden.

	Anzahl Ecken	Anzahl Flächen	Anzahl Kanten	Anzahl Ecken einer Seitenfläche	Anzahl Seitenflächen die in jeder Ecke zusammen-
	e	f	k	n	z
Tetraeder	4 ↔	4	6	3 ↔	3
Hexaeder	8	6	12	4	3
Oktaeder	6	8	12	3	4
Dodekaeder	20	12	30	5	3
Ikosaeder	12	20	30	3	5

Tabelle 1

Die erste und wichtigste Entdeckung ist diese:

Ecken plus Flächen gleich Kanten plus 2
e + f = k + 2

Diese Beziehung ist als *Eulerscher Polyedersatz* bekannt. Wir kommen auf diesen Satz später noch zurück.

Zwei weitere Beziehungen:

- Multipliziert man die Anzahl der Flächen (f) mit der Anzahl Ecken resp. Kanten der Begrenzungsfläche (n), so erhält man die doppelte Anzahl aller Kanten (k). Also: **f · n = 2 · k**.
- Multipliziert man die Anzahl der Ecken (e) mit der Anzahl der an jeder Ecke zusammentreffenden Flächen (z), so erhält man ebenfalls die doppelte Anzahl aller Kanten (k). Also: **e · z = 2 · k**.

9. Dualität

Zwischen Hexaeder und Oktaeder sowie zwischen Dodekaeder und Ikosaeder scheint eine gewisse Verwandtschaft zu bestehen:

- Die Anzahl der Ecken einer Seitenfläche des Hexaeders (n) ist gleich der Anzahl von Seitenflächen, die an einer Ecke zusammenkommen eines Oktaeders (z) und umgekehrt.
- Die Anzahl Flächen des Hexaeders (f) ist gleich der Anzahl Ecken des Oktaeders (e) und umgekehrt.

In Tabelle 1 sind diese Beziehungen mit Pfeilen angezeigt.

Der Tetraeder hat keinen solchen „Partner“. Vermutlich ist er mit sich selber verwandt.

Die Verwandtschaften zeigen sich in folgendem:

Sucht man in einem Hexaeder die Mittelpunkte aller Flächen und verbindet die Mittelpunkte benachbarter Flächen durch Kanten, so erhält man ein Oktaeder. Umgekehrt erhält man durch Verbinden der Flächenmitten eines Oktaeders ein Hexaeder. Hexaeder und Oktaeder sind „verwandt“ miteinander, man spricht von einer **Dualität.**

In gleicher Weise erhält man aus dem Dodekaeder den Ikosaeder, die beiden sind ebenfalls **dual zueinander.**

Wie verhält es sich nun mit dem Tetraeder? Verbindet man die Seitenmitten eines Tetraeders miteinander, so erhält man immer wieder ein Tetraeder. Der Tetraeder ist also **dual zu sich selber.**

Mit der Kopiervorlage 4 können Schülerinnen und Schüler diese Dualität „handgreiflich“ erleben. Zumindest für Tetraeder, Hexaeder und Oktaeder ist es nicht allzu schwierig, die Mittelpunkte benachbarter Flächen durch Kanten zu verbinden und so aus dem Hexaeder ein Oktaeder, aus dem Oktaeder ein Hexaeder und aus dem Tetraeder wieder ein Tetraeder zu machen. Kopiervorlage 5 zeigt die Lösung dieser Aufgabe.

Auch mit Hilfe einer Kunstglas-Kugel kann die Dualität schön gezeigt werden. In Abb. 10 bilden die schwarz ausgezogenen Linien den Dodekaeder, die grünen strichlierten Linien den zugehörigen Ikosaeder.

Die Mittelpunkte der Begrenzungsflächen des Dodekaeders sind die Eckpunkte des Ikosaeders und die Mittelpunkte der Begrenzungsflächen des Ikosaeders sind die Eckpunkte des Dodekaeders.

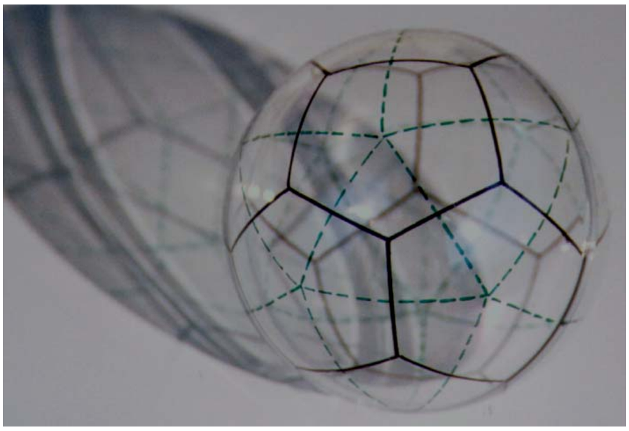


Abb. 10

10. Eulerscher Polyedersatz: e + f = k + 2

An den regulären Polyedern haben wir den Eulerschen Polyedersatz bereits kennen gelernt. *Ecken plus Flächen gleich Kanten plus 2.* Der Satz lautet aber nicht „Satz über reguläre Polyeder“, sondern schlicht und einfach „Polyedersatz“. Er sollte also für alle Polyeder gelten, nicht nur für reguläre Polyeder.

Wir testen den Polyedersatz zunächst an einigen einfachen Beispielen.

- Eine quadratische Pyramide hat 5 Ecken, 5 Flächen, 8 Kanten. 5E + 5F = 8K + 2
- Ein dreiseitiges Prisma hat 6 Ecken, 5 Flächen und 9 Kanten. 6E + 5F = 9K + 2
- Ein sechsseitiges Prisma hat 12 Ecken, 8 Flächen und 18 Kanten. 12E + 8F = 18K + 2

Besorgen Sie sich einen Fussball wie Abb. 11. Er ist zusammengesetzt aus Fünfecken und Sechsecken. Zählen Sie die Ecken, Flächen und Kanten, es sind 60 Ecken, 32 Flächen und 90 Kanten.

60E + 32F = 90K + 2

Abb. 11

Dieser Fussball entsteht aus einem Ikosaeder, dem man die Ecken abgeschnitten hat. Es entstehen Fünfecke und Sechsecke (Abb. 12).

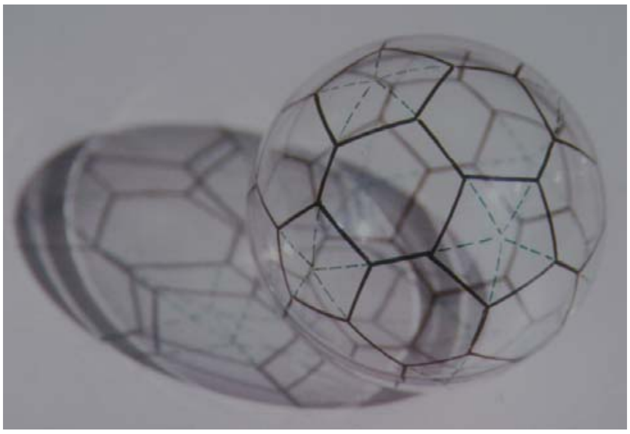


Abb. 12

Auch an einem Volley-Ball kann man Ecken, Flächen und Kanten zählen (Abb. 13). Er hat 32 Ecken, 18 Flächen und 48 Kanten. 32E + 18F = 48K + 2

Abb. 13

Dem Volley-Ball liegt eigentlich ein Würfel zugrunde, wobei man jede der sechs Würfelseiten in drei Streifen geteilt hat. So entstehen aus 6 Würfelflächen die 18 Flächen des Volley-Balles.

Abb. 14 zeigt diesen Volley-Ball auf einer Kunstglas-Kugel.

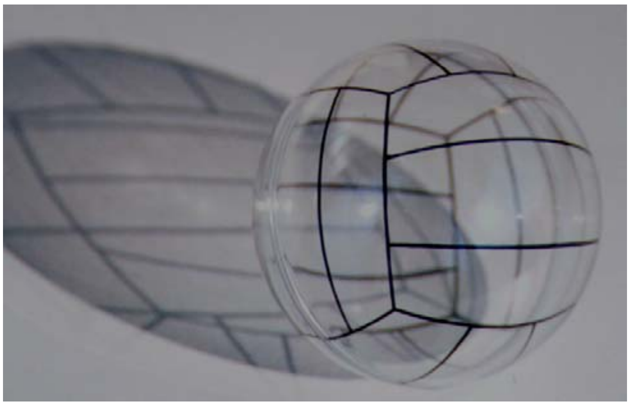


Abb. 14

Tabelle 2 fasst die betrachteten nicht-regulären Polyeder zusammen.

Man sieht: Der Eulersche Polyedersatz ist auch für nichtreguläre Polyeder erfüllt.

	Anzahl Ecken	Anzahl Flächen	Anzahl Kanten
	e	f	k
quadratische Pyramide	5	5	8
dreiseitiges Prisma	6	5	9
sechsseitiges Prisma	12	8	18
Fussball	60	32	90
Volley-Ball	32	18	48

Tabelle 2

11. Verebnung

Abb. 15 zeigt einen „Würfel“ auf einem Luftballon. Zumindest erkennen Sie 8 Ecken, 12 Kanten und 6 Flächen. Bitte zählen Sie nach.

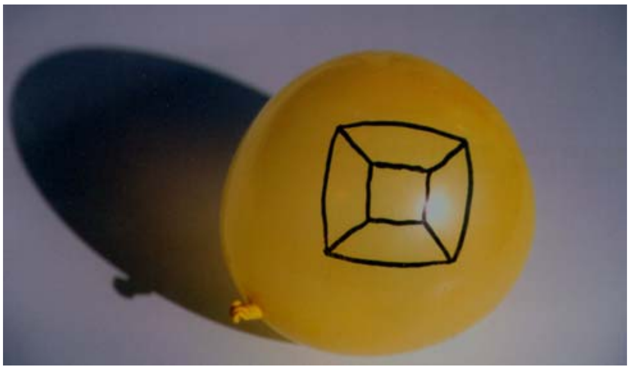


Abb. 15

Abb. 16 kann man so deuten: Auf einem unendlich grossen Luftballon ist ein Würfel gezeichnet. Die Figur ist eine ebene Figur.

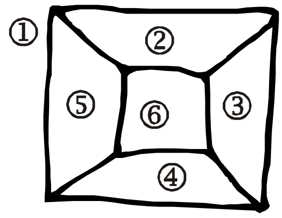


Abb. 16

In topologischer Hinsicht ist diese Figur Abb. 16 dem Würfel ebenbürtig: Sie hat 8 Ecken, 6 Flächen und 12 Kanten. Auch der Eulersche Polyedersatz ist erfüllt. Von jeder Ecke gehen drei Kanten aus und an jeder Ecke stossen drei Flächen zusammen. Beachten Sie, dass jeweils auch das Äussere als eine Begrenzungsfläche anzusehen ist.

Für das Tetraeder müssen folgende Bedingungen erfüllt sein: Die Figur muss 4 Ecken haben, 4 Flächen, an jeder Ecke müssen drei Kanten zusammenstossen. Abb. 17 zeigt wie ein verebnetes Tetraeder aussehen könnte.

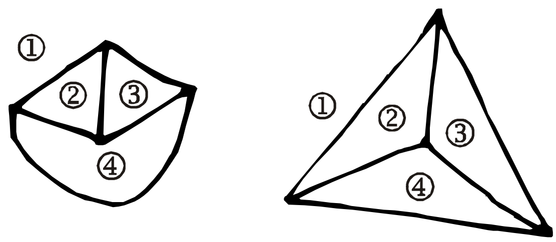


Abb. 17

Abb. 18 zeigt die Verebnung eines Oktaeders. Das kann eine mehr oder weniger „perfekte“ Figur sein. Eine der Flächen ist immer das Äussere.

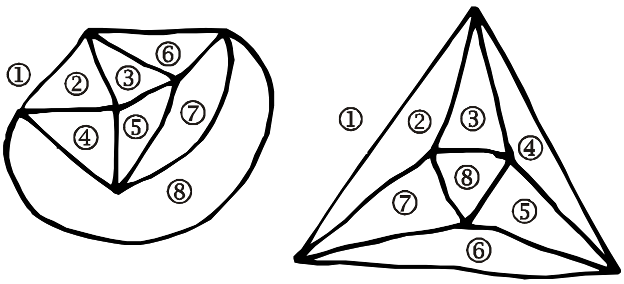


Abb. 18

Abb. 19 zeigt Möglichkeiten ein Dodekaeder und ein Ikosaeder zu verebnen.

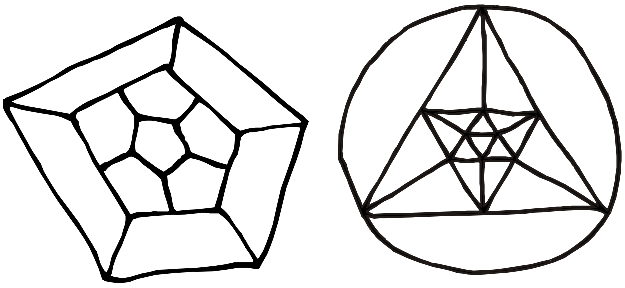


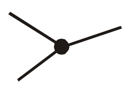
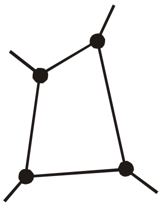
Abb. 19

12. Eulerscher Polyedersatz – Beweis

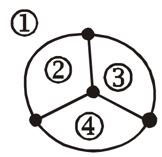
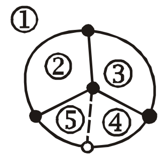
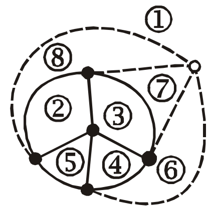
Ein Eulersches Netz – ich will es so nennen – ist ein Netz eines Polyeders in dem der Eulersche Polyedersatz gilt:

Ecken plus Flächen gleich Kanten plus 2.

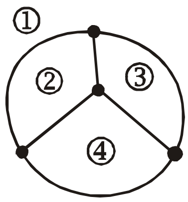
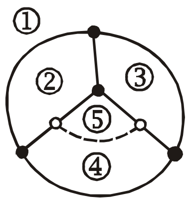
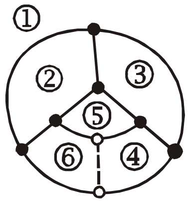
Ein Eulersches Netz besteht aus:

	**Ecken:** Das sind Punkte von denen mindestens drei Kanten wegführen.
	**Kanten:** Das sind Verbindungslinien zwischen zwei Ecken.
	**Flächen:** Das sind von Kanten umschlossene Gebiete. Eine Fläche hat mindestens drei Ecken und mindestens drei Kanten. Das Äussere des Netzes ist immer auch eine Fläche.

Zum Beweis des Eulerschen Polyedersatzes:

	Der **Tetraeder** ist der einfachste Polyeder**.** 4 Ecken plus 4 Flächen gleich 6 Kanten plus 2. $4E + 4F = 6K + 2$
	Fügt man eine Ecke und eine Kante hinzu, so erhöht sich die Zahl der Ecken um 1, die Zahl der Flächen ebenfalls um 1 und die Zahl der Kanten nimmt um 2 zu. Es entsteht das Netz **der Cheops-Pyramide.** $5E + 5F = 8K + 2$
	Fügt man einen weiteren Eckpunkt und vier weitere Kanten hinzu, so erhöht sich die Zahl der Ecken um 1, die Zahl der Flächen um 3 und die Zahl der Kanten um 4. Es entsteht ein **Oktaeder.** $6E + 8F = 12K + 2$

In folgender Weise kann aus dem Netz des Tetraeders das Netz eines Würfels entstehen:

	Wir beginnen wieder mit dem Tetraeder: $4E + 4F = 6K + 2$
	Fügt man zwei weitere Ecken und eine Kante hinzu, so erhöht sich die Zahl der Ecken um 2, die Zahl der Flächen um 1 und die Zahl der Kanten um 3. $6E + 5F = 9K + 2$
	Nochmals zwei Ecken und eine Kante hinzugefügt ergibt ein **Hexaeder.** Das Netz hat 6 Flächen, jede Fläche hat 4 Ecken, von jeder Ecke gehen 3 Kanten aus und es hat 12 Kanten. $8E + 6F = 12K + 2$

Man sieht: Geht man von einem Eulerschen Netz aus (in dem der Polyedersatz gilt) so entsteht durch Einfügen von Ecken oder Kanten immer wieder ein Eulersches Netz (in dem der Polyedersatz gilt).

13. Vierfarbentheorie

Will man die Länder einer Landkarte so unterschiedlich färben, dass niemals an einer Grenze zwei gleiche Farben aufeinander treffen, so kommt man bekanntlich mit maximal vier Farben aus. Diese Vierfarbentheorie war lange Zeit eines der ungelösten Probleme der Mathematik – weder konnte man den Satz beweisen, noch durch irgendwelche ausgeklügelte Landkarten widerlegen. Vor Jahren ist es gelungen, den Satz zu beweisen, allerdings nur unter Einsatz eines aufwändigen Computerprogrammes.

Diese Vierfarbentheorie gilt natürlich auch für Polyeder und auch für ihre Netze. Ein Tetraeder benötigt vier Farben, der Würfel drei, ein Oktaeder kommt mit nur zwei Farben aus.

Abb. 20 zeigt das mit vier Farben eingefärbte Netz des Fussballes und Abb. 21 das eingefärbte Netz des Volley-Balles.

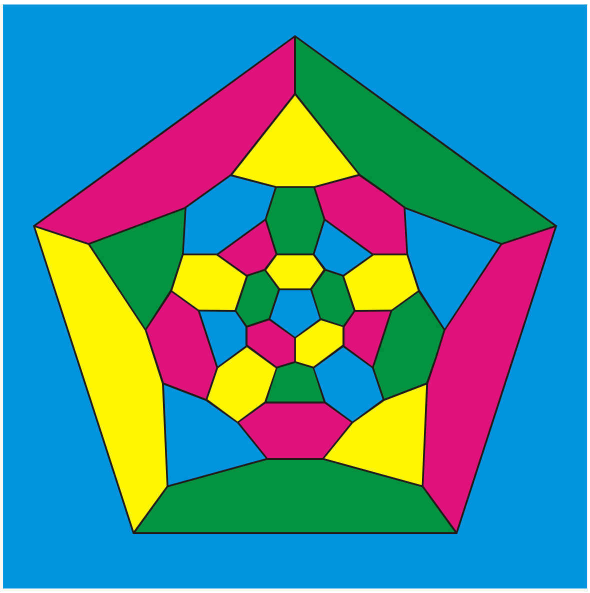


Abb 20

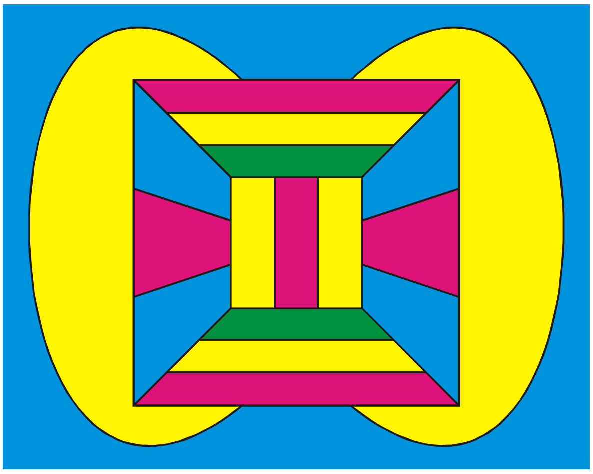


Abb 21

14. Bastelarbeit

Mit etwas Geduld, aber ohne grosse Schwierigkeiten, kann man Ikosaeder (auch Oktaeder) aus Einzelflächen zusammenkleben.

Kopieren Sie Kopiervorlage 6 auf etwas festerem (buntem) Papier. Ziehen Sie die geraden Linien mit einem Lineal und einem Kugelschreiber kräftig nach und schneiden Sie 20 dieser Scheibchen aus. Dann falten Sie die Kleberänder hoch und die 20 Dreiecke können nun zu einem Dodekaeder zusammengeklebt werden (Abb. 22).

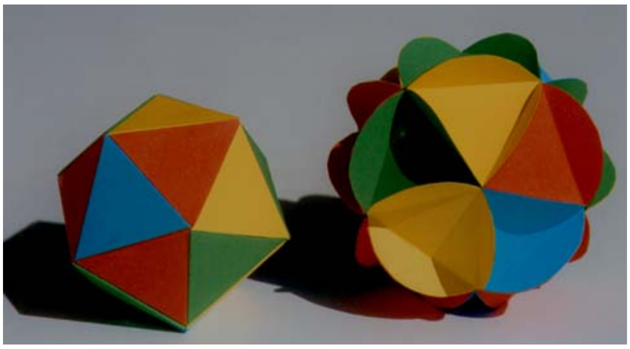


Abb. 22

Einen hübschen Blumenstrauss kann man damit machen.

15. Ein Zaubertrick

Sie konstruieren zweimal auf Karton sechs Fünfecke wie in Abb. 23. Längs der strichlierten Linien schneiden Sie mit einem scharfen Messer etwas ein, damit die Teilflächen dort beweglich sind.

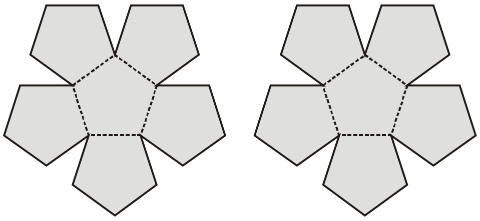


Abb. 23

Dann legen Sie die beiden Teile „auf Lücke" aufeinander und legen ein Gummiband herum (Abb. 24).

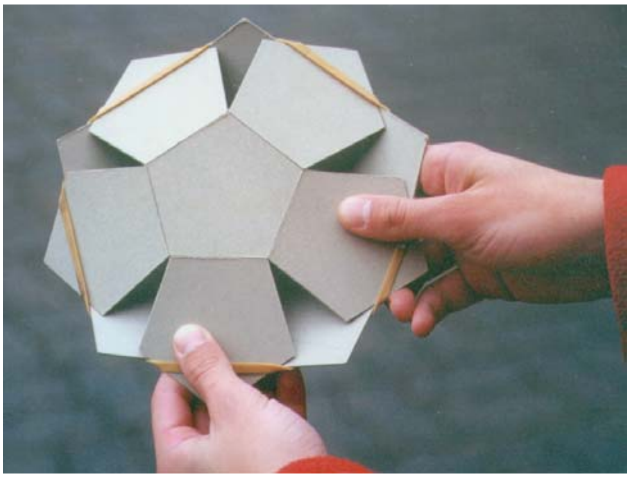


Abb. 24

Und nun der entscheidende Moment: Sie werfen das Ding etwas in die Höhe, und, wenn es klappt, halten Sie ein Dodekaeder in der Hand (Abb. 25).

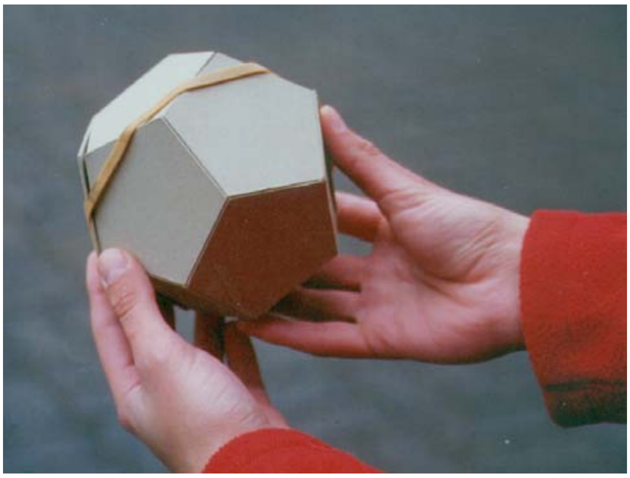


Abb. 25

16. Johannes Kepler und die fünf Platonischen Körper

Johannes Kepler (1571-1630) entdeckte die drei Gesetze der Planetenbewegung, die drei „Keplerschen Gesetze". Physikalisch konnte er diese Gesetze noch nicht herleiten, Newton war noch nicht einmal geboren.

Kepler war stark in Vorstellungen von göttlicher Harmonie verhaftet. Zu seiner Zeit kannte man nur die sechs mit freiem Auge sichtbaren Planeten Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter und Saturn. Dass es gerade sechs Planeten sind, konnte kein Zufall sein. Dazwischen sollten wohl die fünf Platonischen Körper hineinpassen.

In seinem Glauben an platonischer Zahlen- und Figurenmystik pröbelte er und meinte herausgefunden zu haben, welche Platonischen Körper zwischen welchen Planetenbahnen einzufügen sind. Kepler wusste auch, dass die Planetenbahnen nicht genaue Kreise, sondern Ellipsen sind. Also fügte er für jede Planetenbahn noch einen gewissen Spielraum ein. Tabelle 3 zeigt, dass die Bahnradien nach der Keplerschen Vorstellung gar nicht so weit von den tatsächlichen Werten abweichen.

	Bahnradien nach Kepler	tatsächliche Bahnradien
Saturn	1305 Mill. km	1427 Mill. km
Hexaeder		
Jupiter	685 Mill. km	778 Mill. km
Tetraeder		
Mars	208 Mill. km	228 Mill. km
Dodekaeder		
Erde	150 Mill. km	150 Mill. km
Ikosaeder		
Venus	108 Mill. km	108 Mill. km
Oktaeder		
Merkur	57 Mill. km	57 Mill. km

Tabelle 3

Abb. 26 zeigt eine Darstellung des Keplerschen Weltsystems aus seinem *Mysterium Cosmographicum*.

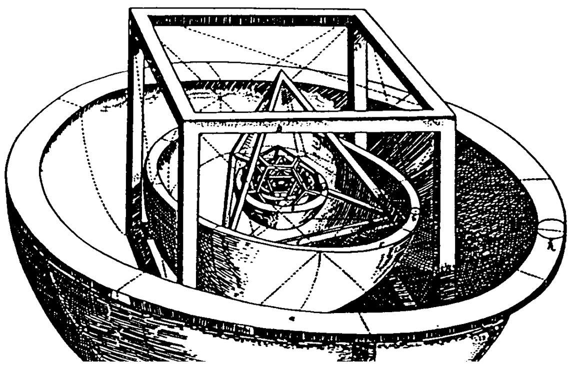


Abb. 26

17. Warum es keine eckigen Seifenblasen gibt

Reguläre Polyeder bieten Gelegenheit für Berechnungen. Für Tetraeder, Hexaeder und Oktaeder ist die Berechnung von Volumen und Oberfläche nicht allzu schwierig. Man braucht lediglich gute Abbildungen, den Pythagoreischen Lehresatz und natürlich auch die Hilfe der Lehrperson. Dann sollte das wohl zu schaffen sein.

Die Berechnungen für Dodekaeder und Ikosaeder hingegen sind sehr anspruchsvoll.

Tabelle 4 enthält eine Reihe von Formeln. Neben den regulären Polyedern ist auch die Kugel mit aufgenommen.

Zeile 1: Berechnung von r bei gegebenem a.
Zeile 2: Berechnung von a bei gegebenem r.
Zeile 3: Berechnung von V bei gegebenem a.
Zeile 4: Berechnung von V bei gegebenem r.
Zeile 5: Berechnung von O bei gegebenem a.
Zeile 6: Berechnung von O bei gegebenem r.

Nun zu den **Seifenblasen.** Interessant ist die Berechnung der Oberfläche O bei gegebenem Volumen V.

In Tabelle 5 ist angenommen, dass alle Polyeder (und auch die Kugel) das Volumen V = 1 besitzen. Man berechnet als ersten Schritt die Seitenkante a (bei der Kugel geht das natürlich nicht) und daraus die Oberfläche O.

Man sieht: Unter allen Polyedern mit gleichem Volumen hat die Kugel die kleinste Oberfläche. Das weiss natürlich die Seifenblase und nachdem sie auf Grund ihrer Oberflächenspannung bestrebt ist, ihre Oberfläche möglichst klein zu halten, formt sie sich zu einer Kugel.

Würfelförmige Seifenblasen zu erzeugen wäre wohl ein Ding der Unmöglichkeit. Oder geht's am Ende doch?

a = Seitenkante, r = Radius der Umkugel, V = Volumen, O = Oberfläche

		Tetra-eder	Hexa-eder	Okta-eder	Dodekaeder	Ikosaeder	Kugel
Zeile 1	r =	$a\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}$	$a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$	$a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$	$a\cdot\frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{3}}{4}$	$a\cdot\frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$	
Zeile 2	a =	$r\cdot\frac{4}{\sqrt{6}}$	$r\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}$	$r\cdot\sqrt{2}$	$r\cdot\frac{4}{(1+\sqrt{5})\sqrt{3}}$	$r\cdot\frac{4}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}$	–
Zeile 3	V =	$a^3\cdot\frac{\sqrt{2}}{12}$	a^3	$a^3\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}$	$a^3\cdot\frac{15+7\sqrt{5}}{4}$	$a^3\cdot\frac{5\cdot(3+\sqrt{5})}{12}$	–
Zeile 4	V =	$r^3\cdot\frac{8}{9\sqrt{3}}$	$r^3\cdot\frac{8\sqrt{3}}{9}$	$r^3\cdot\frac{4}{3}$	$r^3\cdot\frac{2}{9}\sqrt{30(3+\sqrt{5})}$	$r^3\cdot\frac{2}{3}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}$	$r^3\cdot\frac{4\pi}{3}$
Zeile 5	O =	$a^2\cdot\sqrt{3}$	$a^2\cdot 6$	$a^2\cdot 2\sqrt{3}$	$a^2\cdot 3\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$	$a^2\cdot\sqrt{3}$	–
Zeile 6	O =	$r^2\cdot\frac{8\sqrt{3}}{3}$	$r^2\cdot 8$	$r^2\cdot 4\sqrt{3}$	$r^2\cdot\frac{8}{3+\sqrt{5}}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$	$r^2\cdot\sqrt{3}\cdot(10-2\sqrt{5})$	$r^2\cdot 4\pi$

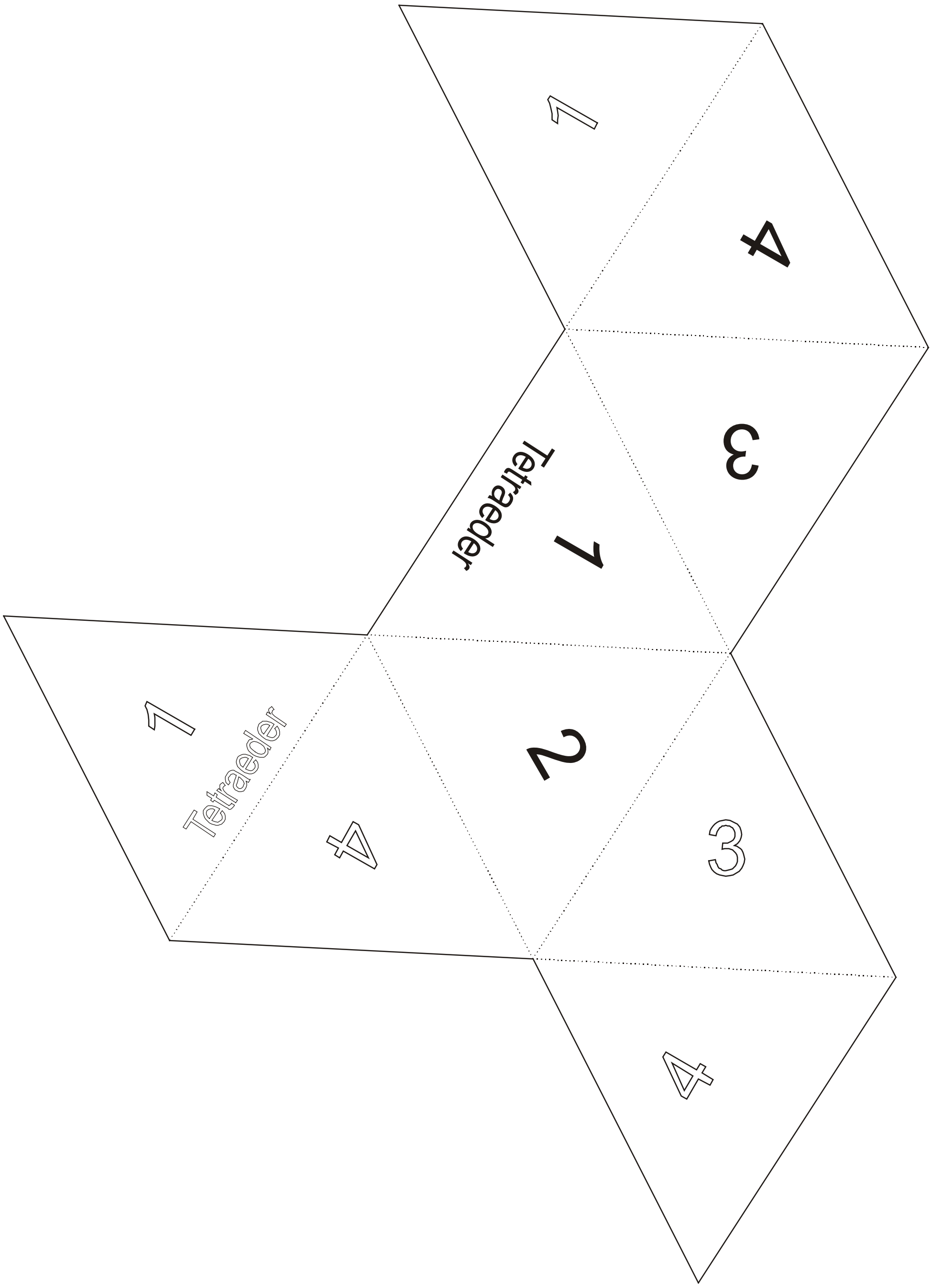
Tabelle 4

	Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder	Kugel
V =	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
a =	2.0396	1.0000	1.2849	0.5072	0.7710	–
r =	1.2490	0.8660	0.9086	0.7107	0.7333	0.6204
O =	7.2056	6.0000	5.7191	5.3116	5.1483	4.8360

Tabelle 5

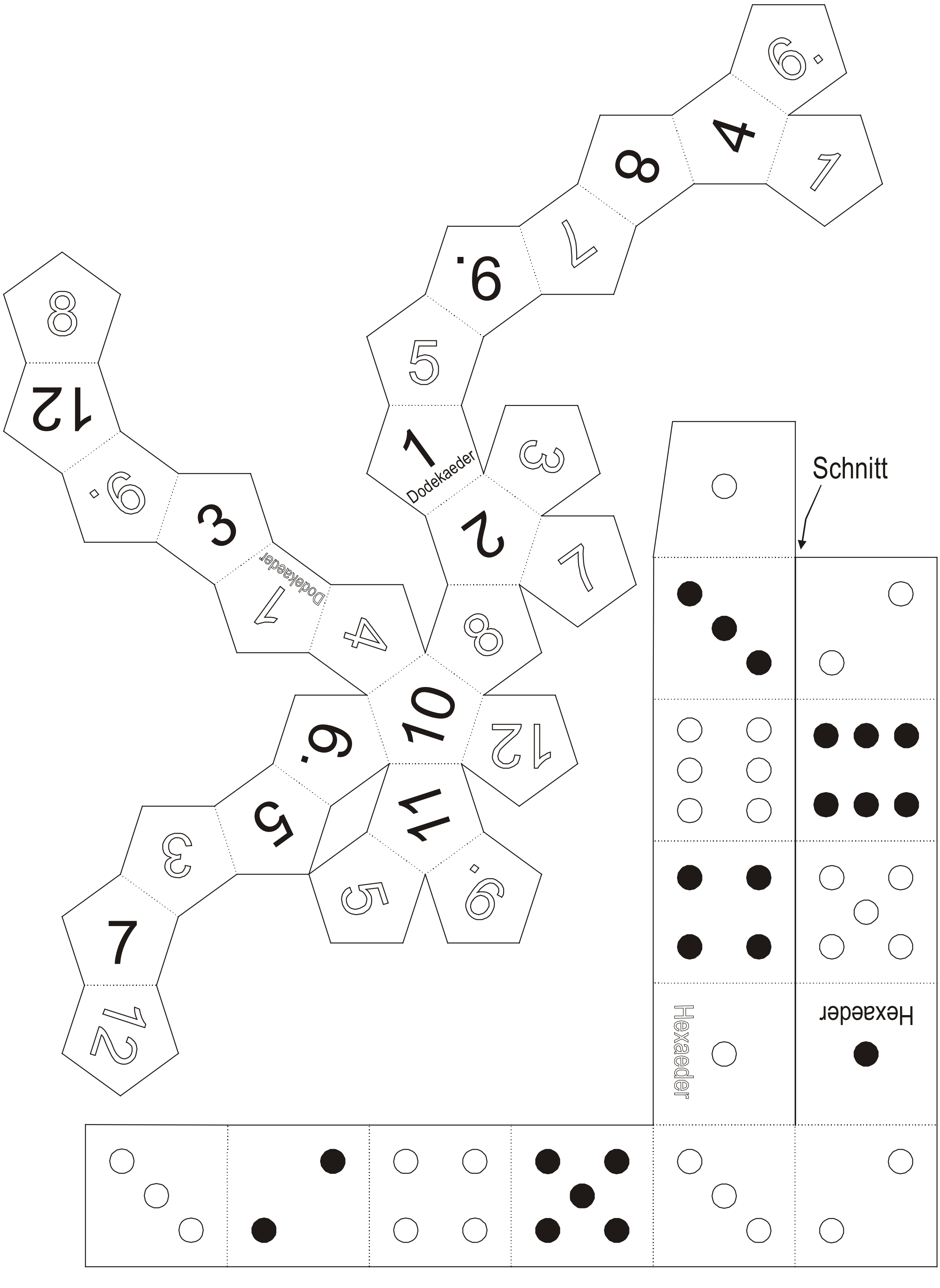
Kopiervorlage 1

Flechtmodell **Tetraeder,** Volumen 15 cm^3



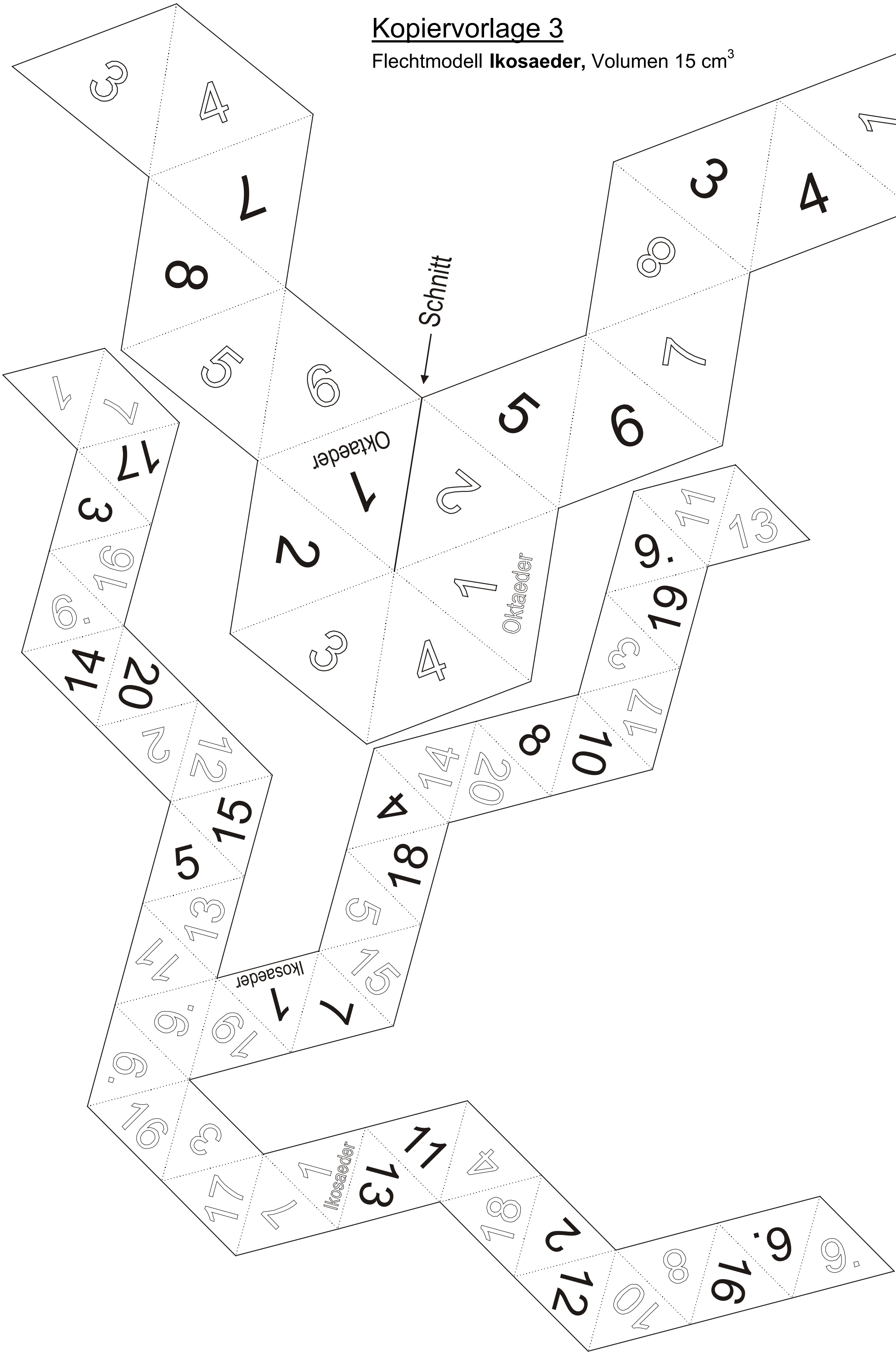
Kopiervorlage 2

Flechtmodell **Hexaeder,** Volumen 15 cm^3
Flechtmodell **Dodekaeder,** Volumen 15 cm^3



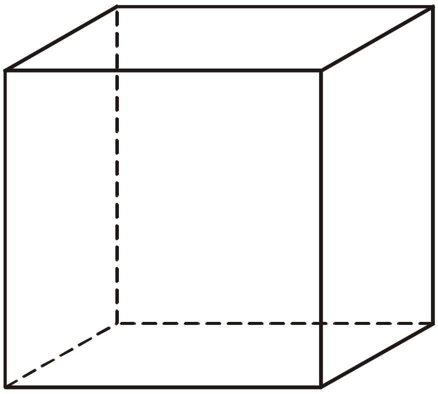
Kopiervorlage 3

Flechtmodell **Ikosaeder,** Volumen 15 cm^3

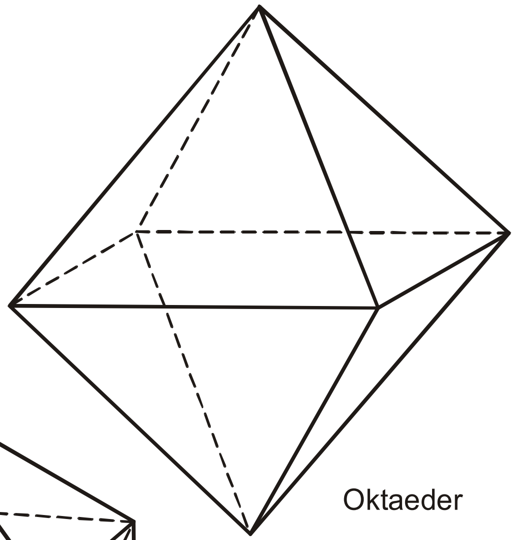


Kopiervorlage 4

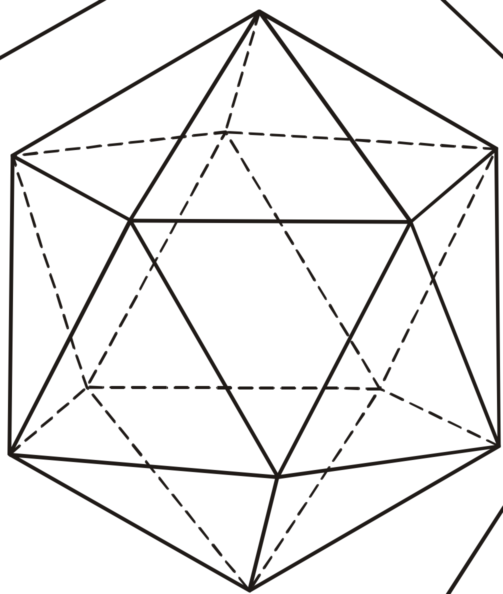
Dualität: Verbinden Sie die Mittelpunkte benachbarter Flächen.



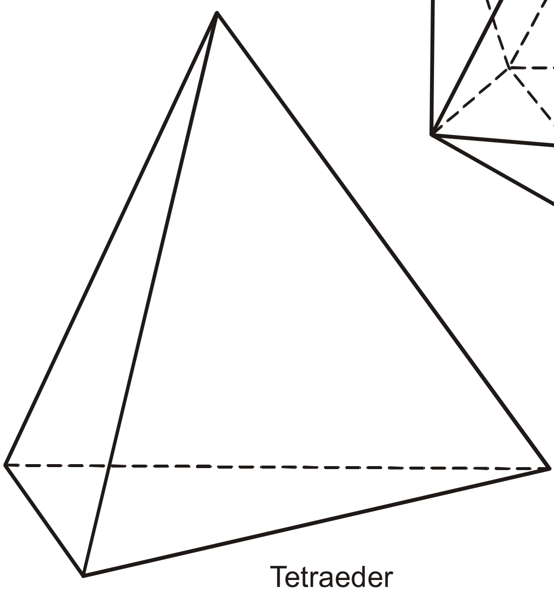
Hexaeder (Würfel)



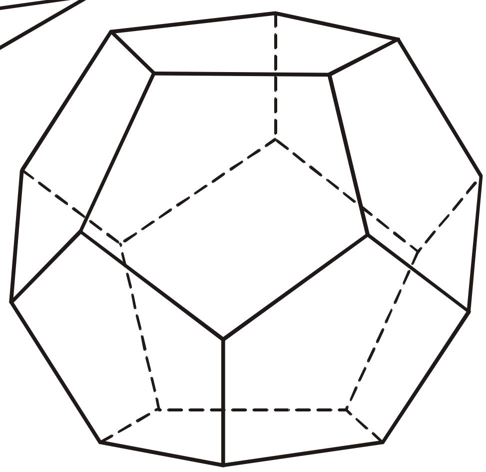
Oktaeder



Ikosaeder



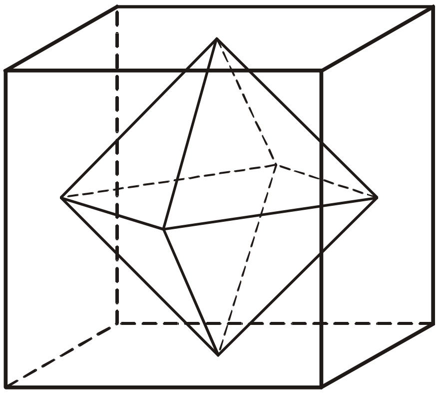
Tetraeder



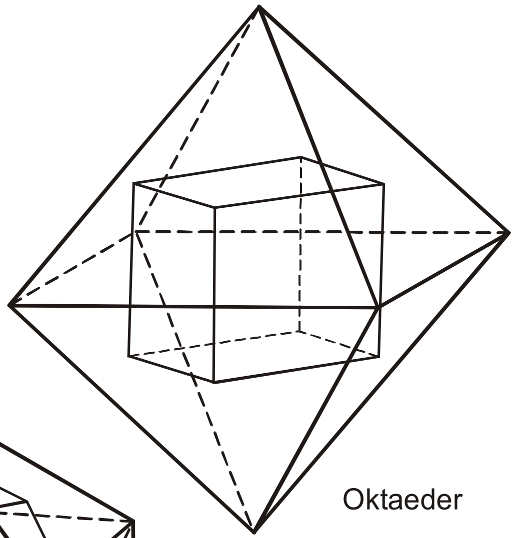
Dodekaeder

Kopiervorlage 5

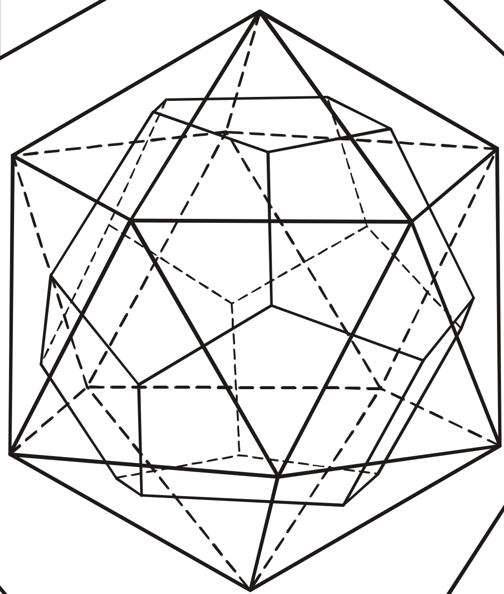
Dualität: Lösung



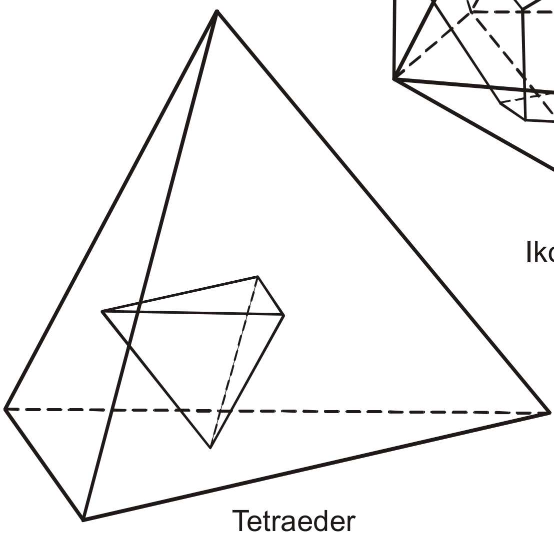
Hexaeder (Würfel)



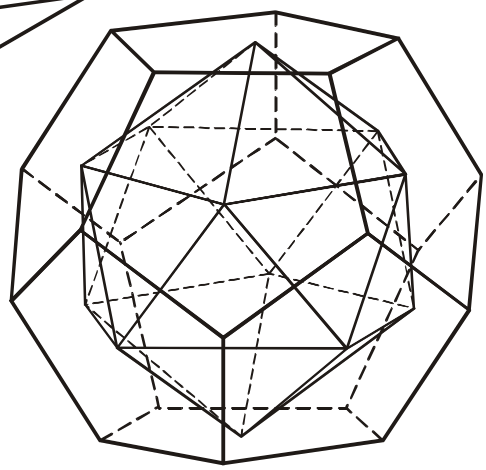
Oktaeder



Ikosaeder



Tetraeder



Dodekaeder

Kopiervorlage 6

Kopieren Sie auf festeres (buntes) Papier, ziehen Sie die Konturen der Dreiecke mit einem Kugelschreiber kräftig nach, schneiden Sie 20 Scheibchen aus, falten Sie entlang der nachgezogenen Linien und kleben Sie die Einzelelemente zu einem Ikosaeder (oder Oktaeder) zusammen.